Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

63e jaargang
1987 | 1988
maart

Euclides 6

Wolters-Noordhoff

Euclides

Redactie

Drs H. Bakker
G. Bulthuis
W. M. J. M. van Gaans
Drs M. C. van Hoorn (hoofdredacteur)
Drs C. G. J. Nagtegaal
Drs A. B. Oosten (eindredacteur)
P. E. de Roest (secretaris)
Ir. V. Schmidt
Mw. H. S. Susijn-van Zaale
Dr. P. G. J. Vredenduin (penningmeester)
A. van der Wal

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 55,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 37,50; contributie zonder Euclides *f* 30,–.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs M. C. van Hoorn, Postbus 9025, 9703 LA Groningen. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½, bij voorkeur op Euclides-kopijbladen. De redactiesecretaris P.E. de Roest, Blijhamsterweg 94, 9672 XA Winschoten, tel. 05970-2 20 27 stuurt desgevraagd kopijbladen met gebruiksaanwijzing toe. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs H. Bakker, Jan Steenlaan 11, 8932 EA Leeuwarden, tel. 058-13 59 76.

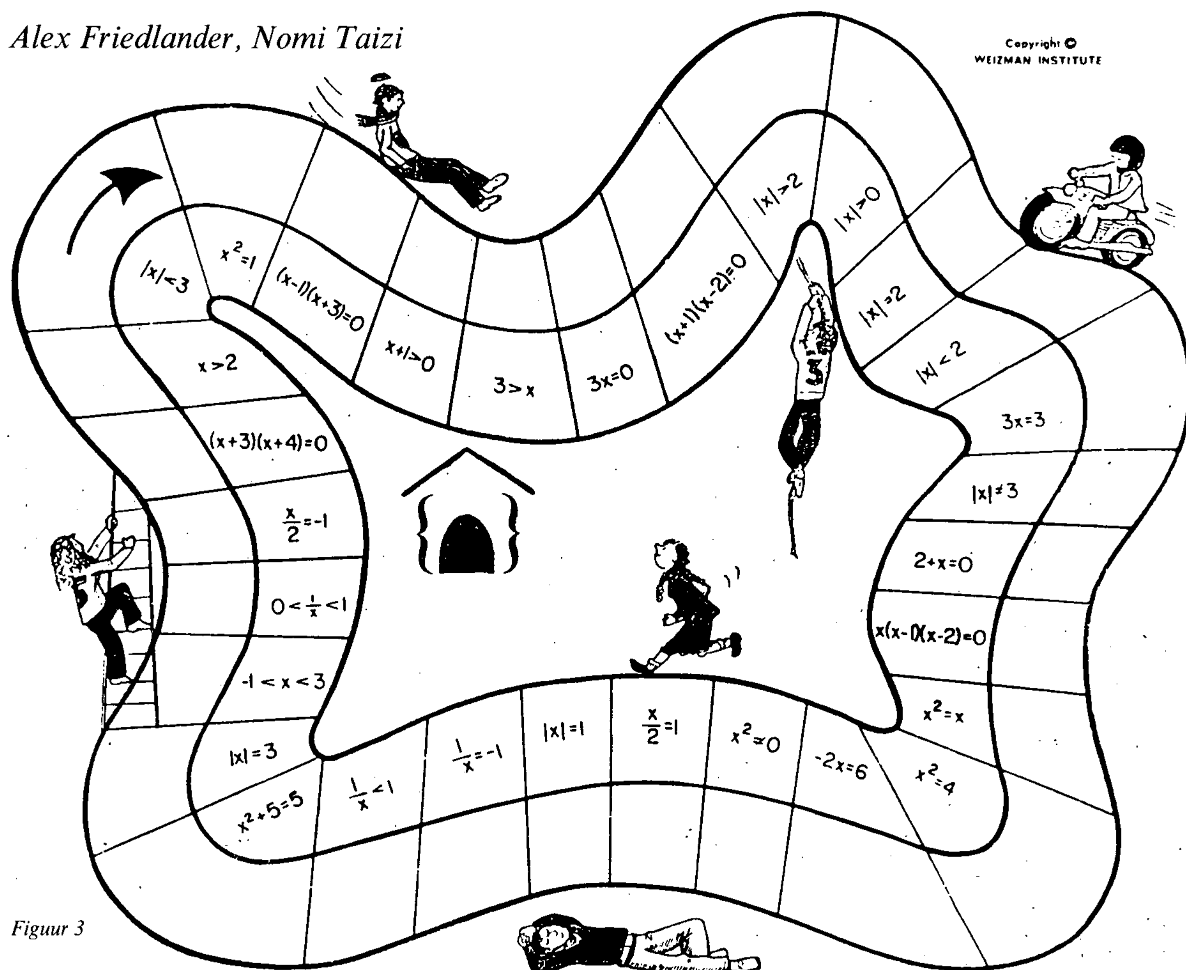
Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland.
Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 48,75. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 29,50.
Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f* 8,25 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

ISSN 01.65-0394

Algebra-spelletjes voor beginners

Alex Friedlander, Nomi Taizi



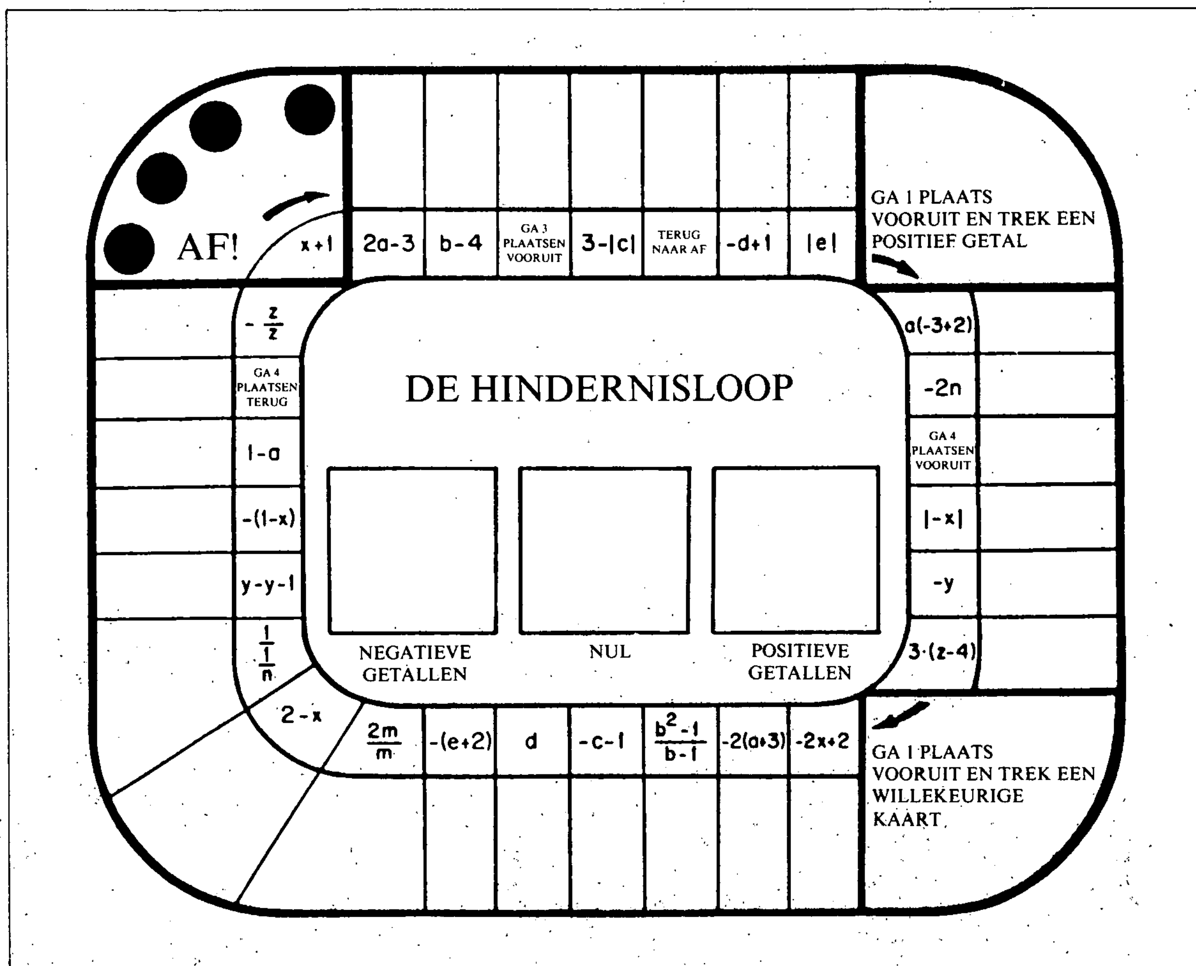
Figuur 3

Inleiding

Eén van de problemen waar beginners in de algebra mee te kampen hebben, is het onder de knie krijgen van de begrippen *functie** en *open bewering* (dat wil zeggen *vergelijking* of *ongelijkheid*). Het is een lastig probleem, met name voor de minder begaafde kinderen, die dikwijls moeite hebben met het begrijpen van abstracte redeneringen. We verwonderen ons bijvoorbeeld over de manier waarop sommige leerlingen algebraïsche uitdrukkingen hanteren zonder werkelijk 'aan te voelen' wat de betekenis ervan is. De meeste leerlingen kunnen wel een enkel getal in een eenvoudig functievoorschrift substitueren, of een simpele vergelijking oplossen. Maar wanneer het iets ingewikkelder wordt (bijvoorbeeld bij het voorspellen van de functiewaarden bij een gegeven verzameling te substitueren getallen, of bij het oplossen van een ongelijkheid), gaat het mis.

Door de jaren heen zijn er heel wat rekenspelletjes ontworpen, maar algebra-spelletjes zijn nog betrekkelijk schaars. Onze Mathematics Group heeft een lange ervaring in het ontwikkelen van spelletjes die geschikt zijn vóór algebralessen aan beginners en die naar wij menen een wezenlijk onderdeel vormen van het onderwijsprogramma.

De voornaamste reden waarom deze spelletjes nuttig zijn is het feit dat zij een 'concrete' situatie kunnen scheppen. Om een eenvoudig voorbeeld te geven: 'Zal substitutie van een positief of negatief

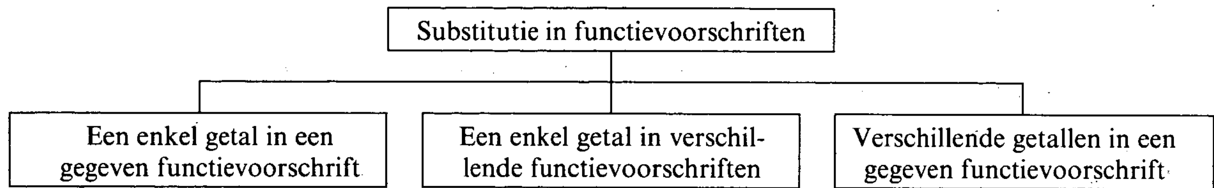


Figuur 1

getal in het functievoorschrift $30 - x$ altijd een positieve uitkomst geven?' In plaats van het abstracte vraagstuk krijgt de leerling het probleem voorgeschoteld met twee omgekeerde stapeltjes voor zich. Hij weet dat het ene stapeltje positieve getallen bevat en het andere negatieve. Op de eerste plaats heeft hij al enig houvast aan het feit dat de kaarten tastbaar (concreet) voor hem liggen. Bovendien ontleent hij extra zekerheid aan het feit dat hij de kaarten zodra hij het antwoord geraden heeft kan omdraaien en zijn antwoord kan toetsen.
De spelletjes die hier gepresenteerd worden kunnen moeiteloos worden ingepast in het onderwijzen van twee hoofdthema's in de algebra voor beginners: *functies* en *open beweringen*. Voor elk van deze twee onderwerpen zullen voorbeelden van geschikte spelletjes worden gegeven, met een bespreking van hun educatieve waarde.

Spelletjes met functies

De drie spelletjes die nu beschreven worden zijn ontworpen om de leerling plezier te laten beleven aan het meestal saaie en technische substitueren van getallen in functievoorschriften. De onderwerpen die door deze spelletjes worden bestreken kunnen in het volgende schema weergegeven worden:



Schema 1

Bovendien bevatten de spelletjes ook omgekeerde versies van de in het schema genoemde opgaven, waarin men, uitgaande van de uitkomst van een substitutie, de oorspronkelijke functie moet reconstrueren.

1 De Hindernisloop (twee à vier spelers)

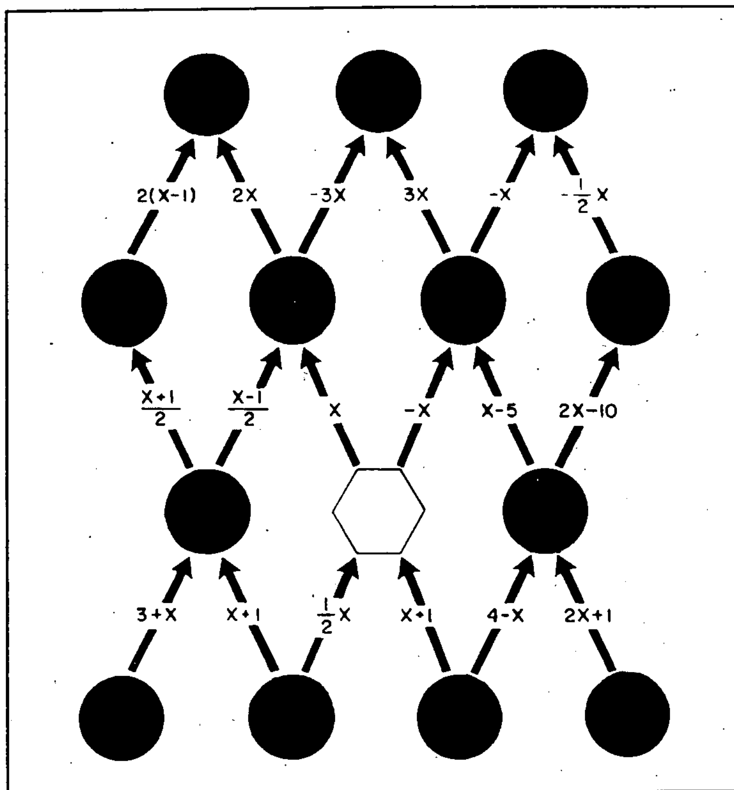
Dit is één van de meest succesvolle spelletjes die we ontworpen hebben[1]. Het bestaat uit een speelbord (Figuur 1), vier pionnen en kaartjes die voorzien zijn van negatieve getallen, positieve getallen en nullen.
De kaartjes worden omgekeerd op de daartoe aangewezen plaatsen op het bord gelegd. Elke speler kiest als hij aan de beurt is een kaartje uit de stapel die hem het voordeligst lijkt in combinatie met de plaats waar zijn pion zich op het bord bevindt. Hij substitueert het getal in de *functie** waarop hij op dat moment staat en de uitkomst bepaalt dan zijn zet; indien de uitkomst positief is gaat hij het overeenkomstige aantal plaatsen vooruit, indien negatief achteruit en als de uitkomst nul bedraagt blijft hij staan.
Winnaar is degene die het eerst tweemaal het bord rond geweest is. Dit spel kan naar gelang het niveau van de leerlingen in verschillende versies gespeeld worden[2].

2 Pijl en Fiche (twee spelers)

In dit spel gaat het om de betrekking tussen een gegeven getal en de uitkomst wanneer dat getal in een functie wordt gesubstitueerd. Het spel omvat een speelbord (Figuur 2), vier zeshoekige fiches met getallen (2, 3, -2 en 1) die bij het begin van het spel gebruikt worden en ronde fiches met een verscheidenheid aan (zorgvuldig gekozen) getallen er op. De eerste speler plaatst één van de zeshoekige fiches op de zeshoek op het bord. Aan het begin hebben beide spelers vijf ronde fiches ontvangen. Wie nu aan zet is legt een passend fiche onder- of bovenaan een pijl waarvan aan het andere eind reeds een getal ligt. Als een speler geen passend fiche heeft, moet hij een fiche uit de pot trekken, tot die leeg is. Winnaar is degene die het eerst al zijn fiches heeft neergelegd.

3 Hoe groter hoe beter (twee spelers)

Moeilijkheidsgraad I. Elk van de spelers krijgt een omgekeerd stapeltje kaarten met functievoorschriften er op. In het midden ligt een ander stapeltje kaarten, ook omgekeerd, voorzien van getallen. De twee spelers keren telkens één van hun eigen kaarten om en ook één van het middelste stapeltje en substitueren het getal in hun eigen functie. Degene die de hoogste uitkomst heeft krijgt beide kaarten. Winnaar is degene die uiteindelijk de meeste kaarten heeft.
Moeilijkheidsgraad II. Het spel bestaat uit 16 kaarten met functievoorschriften en een dobbelsteen met getallen van -3 tot en met $+3$ (0 ontbreekt). Elk van de spelers neemt twee kaarten. De dobbelsteen wordt geworpen en de twee spelers moeten beslissen in welk van hun twee functies ze het geworpen getal moeten substitueren om de hoogste uitkomst te krijgen. De speler met de hoogste uitkomst krijgt de twee kaarten van de ander. Winnaar is degene die uiteindelijk de meeste kaarten heeft.
Moeilijkheidsgraad III. Hierin is de rol van de getallen en de functies omgekeerd. De spelers hebben twee getallen en beslissen welk van deze twee ze in de gegeven functie moeten substitueren om de voordeligste uitkomst te krijgen.



Figuur 2

In de klas zagen wij dat de motivatie van de leerlingen duidelijk toenam tijdens de lessen waarin met deze spelletjes gewerkt werd. We moeten ons echter ook afvragen in hoeverre een spel een wiskundig doel dient, dat wil zeggen in hoeverre er verschillende aspecten van wiskundige leerstof in aan bod komen.

Alle spelletjes hebben betrekking op het simpelweg substitueren van een gegeven getal in een gegeven functie. Niettemin zijn deze spelletjes, zo eenvoudig als ze zijn, van groot nut voor zwakke leerlingen. Als een getal op een kaartje staat kan de leerling het aanraken en verplaatsen. Bij het spel **Hoe groter hoe beter**, *Moeilijkheidsgraad II* bijvoorbeeld, viel het op dat zwakke leerlingen geneigd waren de dobbelstenen letterlijk op de kaart te leggen. Deze aanpak lijkt hun een tussenvorm te bieden tussen schriftelijke en mondelinge oefeningen, waarmee ze zelfvertrouwen kunnen opdoen en de betekenis van algebraïsche uitdrukkingen leren 'aanvoelen'.

In **De Hindernisloop** en in **Hoe groter hoe beter**, *Moeilijkheidsgraad III* hebben we een situatie waarin de speler uit een reeks getallen moet kiezen. Het was interessant te zien dat de leerlingen naarmate het spel vorderde steeds minder gingen substitueren. Ze gingen een aantal mogelijkheden elimineren door schattingen of voorspellingen te doen. In het geval van **De Hindernisloop** heeft de speler echter geen getallen voor zich, maar moet hij een getal kiezen uit één van de drie stapeltjes, waarvan hij de inhoud wel kent, maar niet kan zien. In dit geval kwamen de leerlingen die er moeite mee hadden door vallen en opstaan toch tot hun keuzen. Zodoende begonnen ze na een poosje bepaalde zelf-uitgedachte regels toe te passen, die in sommige gevallen niet bleken te kloppen. Eén zo'n regeltje dat dikwijls werd toegepast, was dat als er een min in de uitdrukking voorkwam een negatief getal

moest worden ingevuld om een positieve uitkomst te krijgen. Dan zou men in het geval van $z - 4$ een negatief getal moeten substitueren!
In sommige gevallen constateerden we een geleidelijk ontwikkelen van deze regeltjes, waarbij onjuiste werden verworpen en andere werden bijgesteld op grond van opgedane ervaring. In vrijwel alle geobserveerde gevallen leerden de kinderen uit eigen ervaring uit welk stapeltje ze een kaart moesten trekken. Een interessant geval was dat van een leerling die bewust een getal uit het 'foute' stapeltje trok en zei dat hij wel wist dat het fout was, maar dat hij niet met negatieve getallen overweg kon. Dit voorbeeld laat zien dat de leerling wel begreep dat hij een negatief getal moest hebben, maar vaardigheid of zelfvertrouwen tekort kwam om er mee te werken.

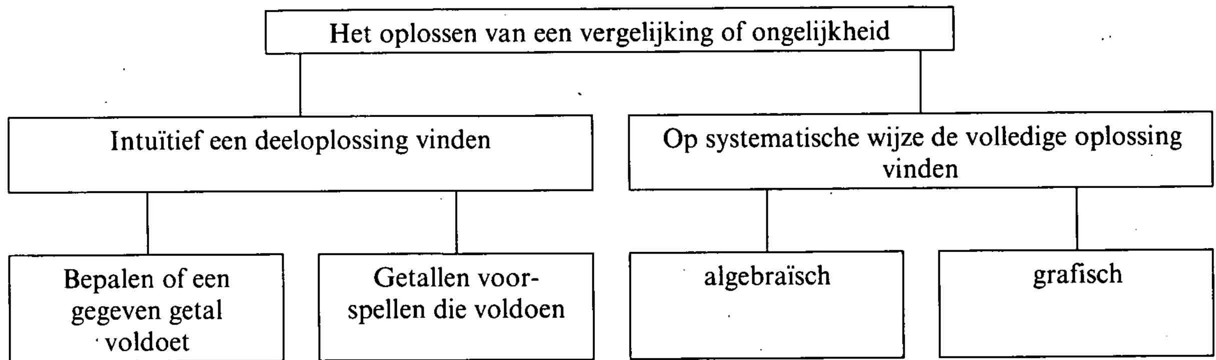
Gevoel voor wat een functie met een getal doet wordt aangekweekt door middel van **De Hindernisloop, Hoe groter hoe beter**, *Moeilijkheidsgraden I* en *II*, en **Pijl en Fiche**. Met deze spelletjes leren de kinderen spelenderwijs de betekenis van het minteken vóór een variabele, of de invloed van een getal tussen 0 en 1 als coëfficiënt van een variabele. Nogmaals, bij **Hoe groter hoe beter**, *Moeilijkheidsgraad II* heeft de leerling twee functies voor zich en als hij niet weet welke van de twee hij moet gebruiken kan hij in beide substitueren, terwijl hij bij de andere spelletjes telkens maar één functie heeft en uit een aantal getallen zijn keuze moet maken. Hierdoor wordt de leerling aangemoedigd eigen regels af te leiden. Ettelijke opmerkingen die wij van de leerlingen opvingen geven naar ons idee blijk van correct wiskundig redeneren en beslissen; een leerling merkte op: 'In b^2 kun je beter -3 dan 1 substitueren om een groot getal te krijgen'; een ander, die een positief getal wilde maken van de uitdrukking $3 - b^2$, riep uit: 'Wat jammer dat ik geen 0 heb' (interessant is dat hij niet zei: 'Wat jammer dat ik geen negatieve getallen heb', wat men misschien eerder verwacht zou hebben).
Zulke opmerkingen laten zien dat de leerlingen door de mogelijkheid om direct te toetsen, de getallen te 'hanteren' en te werken met een gegeven reeks (dat wil zeggen een stapeltje) getallen van het niveau van techniek-zonder-meer op een hoger analyseer-niveau komen.

De omgekeerde richting van het substitutie-proces komt voornamelijk in **Pijl en Fiche** aan bod. Het grootste deel van het spel kan worden gespeeld in de richting substitutiegetal → uitkomst. Maar vroeg of laat bereiken de spelers een moeilijker stadium, wanneer de enige open plaatsen onder aan de pijlen liggen. In zulke gevallen moet de leerling een getal kiezen zodanig dat wanneer dat getal in de functie wordt gesubstitueerd, het reeds gegeven getal de uitkomst is. Hierbij krijgen we ook in de spelsituatie het in de klas zo bekende verschijnsel van de leerling die de uitkomst verwart met het te substitueren getal: al staat het getal boven aan de pijl, toch zullen sommige leerlingen dit getal in de uitdrukking substitueren en een fiche met het resulterende getal onder aan de pijl plaatsen.
Hier blijkt nog een voordeel van het gebruik van spelletjes. De leerling die deze vergissing begaat wordt vrijwel altijd door zijn tegenspeler op zijn fout gewezen. Laatstgenoemde hoeft alleen maar na te gaan (en doet dat meestal ook) of het zojuist neergelegde getal na substitutie in de desbetreffende uitdrukking het juiste antwoord oplevert. Daarmee heeft hij het natuurlijk veel gemakkelijker dan de speler die aan zet was. Dit levert een situatie op waarin de leerlingen zichzelf kunnen corrigeren, zoals bij de pienteren het geval is, of waarin de docent kan ingrijpen. In feite heeft de leerling in deze situatie drie mogelijkheden: hij kan vermoeden welk getal hij moet substitueren, zijn vermoeden toetsen en dan kijken of hij dat getal ook heeft. Hij kan potlood en papier pakken, de betreffende vergelijking opschrijven en het te substitueren getal berekenen. En de eenvoudigste mogelijkheid is achtereenvolgens elk van de getallen in zijn hand te substitueren om te zien of één ervan de gewenste oplossing geeft. Geleidelijk aan zal elke speler één van deze methoden gaan toepassen.

Spelletjes met open beweringen (vergelijkingen en ongelijkheden)

Het oplossen van een vergelijking of ongelijkheid vereist de onderstaande vaardigheden (schema 2).

Twee van de spelletjes die nu besproken zullen worden hebben betrekking op de eerste stappen van het intuïtief vinden van een deeloplossing,



Schema 2

terwijl de twee andere spelletjes van de leerling verlangen dat hij de volledige oplossing van een vergelijking of ongelijkheid vindt.

1 Waar of Niet (twee spelers)

In dit spel moeten er getallen in een vergelijking of ongelijkheid worden gesubstitueerd en moet worden getoetst of resulterende beweringen waar zijn of niet. Het spel bestaat uit 20 kaarten met een vergelijking of een ongelijkheid er op, en een tolletje met getallen. De spelers krijgen elk vier kaarten en de rest wordt omgekeerd op een stapel gelegd. De tol wordt telkens gebruikt om te bepalen welk getal gesubstitueerd moet worden in de vier open beweringen van elke speler. De spelers leggen de beweringen die kloppend worden op tafel en vullen hun reeks kaarten weer tot vier aan, tot de pot leeg is. De speler die in één zo'n ronde de meeste kaarten op tafel heeft wint alle kaarten die in deze ronde neergelegd zijn. Als de twee spelers een gelijk aantal kaarten hebben neergelegd, krijgt de winnaar van de volgende ronde de kaarten van beide rondes. Winnaar is degene die uiteindelijk de meeste kaarten heeft gewonnen.

2 Jacht op de Waar-heid (twee à vier spelers)

In dit spel moet de leerling een aantal getallen vinden (intuïtief) die voldoen aan een gegeven vergelijking of ongelijkheid. Het spel bestaat uit een speelbord (zie Figuur 3, de kop van dit artikel), twee dobbelstenen (respectievelijk met 0, 1, 1, 2, 2, 3 en met 0, -1, -1, -2, -2, -3) en per speler een pion. Elke speler beslist als hij aan zet is of hij met één of met beide dobbelstenen wil gooien, afgaande op de vergelijking of ongelijkheid waarop zijn pion staat en verplaatst zijn pion volgens onderstaande regels:

- 6 plaatsen vooruit als het getal (de getallen) op de dobbelsteen (dobbelstenen) precies de volledige oplossing vormt (vormen) van de vergelijking of ongelijkheid in kwestie;
- 4 plaatsen vooruit als er met twee dobbelstenen gegooid is en de twee getallen een deeloplossing vormen;
- 1 plaats vooruit als het getal (één van de getallen) een deeloplossing vormt;
- 0 plaatsen vooruit als geen getal aan de vergelijking dan wel ongelijkheid voldoet;
- 1 plaats achteruit als de speler drie achtereenvolgende beurten niet vooruit gekomen is.

Winnaar is degene die het eerst het hele bord rond geweest is.

3 Mozaïek (één speler)

De speler moet vergelijkingen aan hun oplossingen passen. Twaalf (of vierentwintig) vergelijkingen en hun bijbehorende oplossingen staan langs de randen van negen (of zestien) vierkante kaartjes geschreven, zodanig dat die slechts op één manier tot een mozaïek van 3×3 of 4×4 kaartjes gelegd kunnen worden (zie het voorbeeld in Figuur 4).

$0 \cdot X = 1$ $\frac{x}{2} = 1$	geen oplossing $\frac{2}{x} = 1$ $2X = 0$	2 $2X = 2$
2 $X \cdot 0 = 2$ $\frac{1}{x} = 1$	0 geen oplossing $2 - X = 0$ $\frac{2}{x} = 2$	1 2 $2 - X = 2$
1 $\frac{x}{2} = 0$	1 0 $\frac{2}{x} = 0$	0 geen oplossing

Figuur 4

De moeilijkheidsgraad van het spel kan opgevoerd worden door er groepjes vergelijkingen met identieke oplossingen in op te nemen.

4 Flip-Flap (één speler)

Het principe van dit spel kan voor verschillende doeleinden worden gebruikt. De leerling moet stelsels van vergelijkingen of ongelijkheden met twee variabelen en de grafische weergave van hun oplossing bij elkaar zoeken.
Het spel omvat negen kaarten, met een vergelijking of ongelijkheid aan de ene, en een grafische oplossing aan de andere kant. Op één van de kaarten staat START, met aan de ommezijde een stelsel vergelijkingen of ongelijkheden. Eén van de andere kaarten draagt het woord FINISH en heeft een grafiek op de achterkant. Bij het begin van het spel liggen alle kaarten op tafel uitgespreid met de grafieken (grafische voorstellingen) en het woord START naar boven gekeerd. De speler draait de START-kaart om en zoekt naar de oplossing van dit stelsel vergelijkingen of ongelijkheden. Heeft hij deze gevonden, dan draait hij de desbetreffende kaart om en herhaalt hij de procedure, tot tenslotte de kaart met FINISH wordt omgedraaid. Als dit het geval is voordat alle andere kaarten omgekeerd zijn, heeft hij een fout gemaakt en moet hij opnieuw beginnen.

Hoewel zowel **Waar of Niet** als **Jacht op de Waarheid** ontworpen zijn voor het eerste stadium van het oplossen van een vergelijking of ongelijkheid, waarbij vrij intuïtief te werk wordt gegaan, stellen de twee spelletjes verschillende eisen aan de leerling. In **Waar of Niet** moet de speler tijdens elke beurt meteen beslissen of een (willekeurig) getal een oplossing is van verschillende (willekeurige) open beweringen. Daartegen verlangt **Jacht op de Waarheid** dat de leerling zowel voor als tijdens zijn beurt beslissingen neemt; voor elke zet moet hij bedenken met hoeveel dobbelstenen en met welke hij zal gooien.
De spelstrategieën van **Mozaïek** en **Flip-Flap** zijn qua moeilijkheidsgraad ook verschillend: in **Flip-Flap** volgt de speler de ingebouwde kettingreactie van open beweringen die één-éénduidig corresponderen met hun oplossingen. Daarentegen moet de leerling bij **Mozaïek** gelijktijdig meerdere open beweringen in zijn overwegingen betrekken.

Ten aanzien van de reacties van de leerlingen en ten aanzien van hun oplossingsstrategieën geldt hetzelfde als wat al bij de bespreking van de functiespelletjes gezegd is. Het aanraken en het hanteren van de dobbelstenen en de kaarten met getallen vormt een goede concretisering van het substitutieproces. Dikwijls waren wij getuige van spannende ogenblikken, wanneer een speler letterlijk 'greep' kreeg op het geworpen getal, om het vervolgens zorgvuldig bij de desbetreffende vergelijking of ongelijkheid neer te leggen.
De leerprocessen die in deze spelsituaties geactiveerd worden zijn belangrijker dan de feitelijke vergelijkingen en ongelijkheden. Eén en dezelfde, betrekkelijk eenvoudige open bewering kan op verschillende begripsniveaus worden behandeld: men kan gewoon een getal substitueren en nagaan of het resultaat een ware bewering is (**Waar of Niet**), kiezen uit een gegeven serie oplossingen (**Flip-Flap**), of overwegen welke soort getallen de beste kans op een oplossing biedt (**Jacht op de Waarheid**). Voor het laatstgenoemde spel is duidelijk een hoger niveau van begrijpen vereist dan voor de twee andere spelen.

Evenals bij de functiespelletjes brengt het wedstrijdelement in de spelsituatie een gestage en duidelijk merkbare verbetering van de oplossingsstrategie teweeg en daarmee ook van het begrijpen van de desbetreffende wiskundige leerstof. In **Waar of Niet** bijvoorbeeld substitueren de meeste spelers aanvankelijk automatisch het gegeven getal in elke vergelijking of ongelijkheid. Voor de meer geoefende spelers echter is een snelle blik al voldoende om de winnende vergelijking of ongelijkheid er uit te pikken.

Conclusies

Wiskunde-spelletjes in het algemeen en algebraspelletjes voor beginners in het bijzonder, mogen niet slechts als franje worden beschouwd. Elke docent die nauwkeurig een klas observeert die met één van de hier beschreven spelletjes bezig is, zal zien dat er, afgezien van het voor de hand liggende effect op de motivatie, diverse leerprocessen door worden geactiveerd.

Ingewikkelde en belangrijke wiskundige overwegingen, die zelden aan bod komen in routinematige driloefeningen, komen nu wel aan bod en worden door de leerlingen eigen gemaakt.
Algebra-spelletjes dienen een plaats te hebben in het onderwijsprogramma van iedere beginnende wiskundeleerling. Sommige van deze spelletjes zijn in de handel verkrijgbaar[3]; vele andere zijn eenvoudig zelf te maken. De docent kan een waardevolle collectie opbouwen met verschillende spelstrategieën, die gemakkelijk aan verschillende wiskundige leerstofonderdelen en begripsniveaus kunnen worden aangepast.

Noot

* Van de redactie. In de oorspronkelijke, Engelstalige tekst wordt de term '*open phrase*' gebezigd. Dit laat zich op verschillende wijzen vertalen, bijvoorbeeld als 'onbepaalde vorm', of als 'uitdrukking'. Het gaat hier evenwel om het *functie*begrip, hetgeen door de vertaling '*functie*' wordt benadrukt.
In sommige gevallen zou '*functievoorschrift*' wellicht de voorkeur moeten hebben, met name waar het om substituties gaat (zoals in de '*open phrase*' $30 - x$). Wij houden het meestal op '*functie*' en in het begin enkele keren op '*functievoorschrift*'.

Verwijzingen

1 Friedlander, A. (1977). *The steeplechase*, Mathematics Teaching, 80.
2 Ilani, B., Taizi, N. en Bruckheimer, M. (1982). *Variations of a game as a strategy for teaching skills*. In 'Mathematics for the Middle Grades' (NCTM Jaarboek 1982).
3 De Engelstalige versie van een aantal algebra-spelletjes voor beginners is te verkrijgen bij: Department of Science Teaching, Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israël.

Over de auteurs

Alex Friedman en Nomi Taizi zijn verbonden aan het Department of Science Teaching, Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israël.

Uit: Mathematics in School, januari 1987.
Vertaling: Alexandra Bardet, Groningen.

Mijnheer van Dalen krijgt antwoord

Hessel Pot

In *Euclides* 62-8 (mei '87) schrijft *Hans Aalmoes* het een en ander over de voorrangsconventies bij de notatie van 'rekenzinnen'. Ik wil daar twee verschillende kanttekeningen bij maken.

Het waarom van de conventies

Aan het slot van zijn artikel schrijft Aalmoes: 'In de wiskunde worden zo veel afspraken gemaakt, het had ook anders gekund (...)' en '(Het zijn) afspraken die met het oog op het vervolg van de leerstof logisch zijn; (...)'. Wáár die logica zou blijken, vermeldt hij echter niet, z'n leerlingen moeten de zin ervan maar op gezag geloven?

De voornaamste afspraak betreft de voorrang van vermenigvuldigen (en delen) vóór optellen (en aftrekken). De zin daarvan blijkt gauw genoeg wanneer je een wiskundeboek doorbladert en nagaat waar zónder de prioriteits-regel allemaal haakjes moeten komen. Bij een alternatieve prioriteit 'van-links-naar-rechts' voor vermenigvuldigen en optellen moet een tweedegraads-vorm genoteerd worden als

$3x^2 + (5x) + 7$

en een stelsel van drie lineaire vergelijkingen als

$$\begin{aligned} x + (2y) + (3z) &= 10 \\ 4x + (5y) + (6z) &= 11 \\ 7x + (8y) + (9z) &= 12 \end{aligned}$$

Deze haakjes blijken in de praktijk onwenselijk. Hoewel dit alleen al voldoende reden zou zijn om die haakjes dan maar weg te laten, vermoed ik dat de maal-vóór-plus-gewoonte z'n diepere achtergrond heeft in de gewone dagelijkse praktijk van het rekenen.

Welk type meerstaps-berekening zal in de praktijk van alle eeuwen het meest zijn voorgekomen? Mag ik veronderstellen dat dat het boodschappenlijstje bij de kruidenier is: 10 pond suiker, 6 flessen wijn, ...; totaal *f*...? Zie de afgebeelde rekening. Wegens de context is er geen behoefte aan + - of × - tekens, noch aan haakjes of voorrangsconventies. Als een rekenboekjes-schrijver dit zo kort (en papier-zuinig!) mogelijk afdrukt, komt er te staan

$6 \times 2{,}35 + 4 \times 4{,}30 + 6 \times 4{,}40 + 5 \times 6{,}00 + \ldots$
$\ldots + 7{,}45 + 12/8 \times 0{,}65 + 16{,}95 =$

Zo lang de context bekend verondersteld wordt, zijn haakjes of een voorrangsregel nog steeds overbodig. Ik kan me goed voorstellen dat deze notatiegewoonte voor de meest voorkomende situatie heeft geleid tot het gebruik van de bekende voorrangs-conventie in de gehele rekenkunde en in de algebra.

Voorrang voor de min of voor de macht?

Als tweede kanttekening wil ik een klein vraagteken zetten bij de vanzelfsprekendheid waarmee Aalmoes stelt:

$-2^4 = -16.$

Het lijkt me dat -2^4 geïnterpreteerd kan worden (ook, enigszins onbewust, door leerlingen) als een gecomprimeerde notatie voor:

a $-(2^4)$

b $(-(2))^4$

c $(^-2)^4$

d $0 - 2^4$

e $^-1 \cdot 2^4$

Het hooggeschreven minnetje duidt hier aan dat het streepje niet staat voor de functie 'het tegengestelde van' (in a en b), noch voor de aftrekkingsoperatie (d), maar onderdeel vormt van de standaardnotatie voor een negatief getal.
De uitkomst van $-2^4 = ..$ blijkt nu af te hangen

...sstraat 11-13 - Amsterdam-C - Tel...

Code	Hoev.	ARTIKEL	Eenh. prijs	Bedrag
	6	[illegible]	2 35	14 10
	4	[illegible]	4 30	13 20
	6	[illegible]	4 40	26 40
	5	Martini Dry	6 00	30 00
	19	[illegible]	6 50	123 50
	6	[illegible]	6 90	41 40
	1	[illegible]	7 90	7 90
	8	[illegible]	7 00	56 00
	1	[illegible]	7 45	7 45
	12/3	[illegible]	0 65	7 80
		Statiegeld		16 95
		5451	VERK. Nr.	344 70

van de keuze van de interpretatie: b en c geven 16; a, d en e geven -16.
Aalmoes verdedigt de uitkomst -16 door de interpretatie e vanzelfsprekend te achten. Ik zou echter zeggen dat je pas tot e (en d, ook met uitkomst -16 omdat machtsverheffen vóór aftrekken gaat) kunt besluiten nádat je gekozen hebt voor a, en tegen b en c.
Bestaat er een algemeen bekende, aanvaarde en gevolgde conventie om de notatie -2^4 nimmer te gebruiken in de interpretaties b of c (Van Dalen zwijgt erover)? Ik betwijfel dit.

Je kunt wél constateren dat in een gebruikssituatie, waarbij de notatie voorkomt in een context, verwacht mag worden dat met -2^4 bedoeld wordt $-(2^4) = -16$. Anders zou de min er alleen voor spek en bonen staan.
Evenzo mag je bij een vraag over de veelterm $-x^2 + 7x + 3$ verwachten dat hier bedoeld is $-(x^2)$ en niet $(-x)^2$.
Bij oneven exponenten is de vraag louter academisch: $-(2^3) = (-2)^3 = -8$. En bij gebroken of irrationale exponenten q, heeft -2^q alleen betekenis in de interpretatie $-(2)^q$.

Problemen rijzen pas bij $- x^n$.
Als hier noch in de spatiëring ($- x^n$ of $-x^n$, noch in de context een aanknopingspunt te vinden is, zou je nog kunnen beredeneren dat naar analogie van $-2^4 = -(2^4)$, $-x^2 = -(x^2)$, en $-2^q = -(2^q)$, te verwachten is dat nu ook bedoeld zal zijn $-(x^n)$. Dit is vermoedelijk de reden waarom in enkele (leer-)boeken stilzwijgend de interpretatie $-x^n = -(x^n)$ gevolgd wordt.

Maar... moet zo'n conventie expliciet *onderwezen* en *getoetst* worden? Het lijkt me niet van praktisch belang. Schrijf in de (zeldzame) twijfelgevallen liever haakjes en vraag je leerlingen hetzelfde te doen.

Over de auteur:

Hessel Pot is er, na een doctoraalexamen wis- en natuurkunde in 1969, niet in geslaagd ergens een vaste werkkring te vinden. Zijn belangstelling voor wiskunde-onderwijs leidde onder meer tot het nauw betrokken zijn bij het blad 'Pythagoras' gedurende de laatste acht jaren.

Mooie antwoorden

Dr. J. T. Groenman

1 In een recent nummer van Praxis der Mathematik [1] troffen we een artikel aan van Dr. Hans Kern, dat wellicht ook voor Nederlandse docenten betekenis kan hebben.
Het gaat om het volgende:
Neem aan dat een proefwerk moet worden opgesteld. Leerlingen waarderen het nogal als vraagstukken antwoorden bezitten die zij 'mooi' noemen. Voor hen betekent dat meestal, dat die antwoorden gehele getallen zijn – desnoods rationale.
Gehele getallen wekken enig vertrouwen ten aanzien van de juistheid van de geleverde prestatie. Docenten zullen wel aandacht willen besteden aan de waardering die leerlingen voor mooie antwoorden hebben. Dat is echter niet altijd zo gemakkelijk. Kern zoekt – in een bijzonder geval – naar de sleutel om mooie antwoorden te vinden. Men kan zeggen: niet zonder succes.

2 Kern kiest, als speciaal geval, de gebroken functie $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.
Hierbij wordt er voor gezorgd dat $P(x)$ en $Q(x)$ veeltermen zijn, waarvan de som van de graden 3 is. Bovendien zijn $P(x)$ en $Q(x)$ ontbindbaar.
De vraag die Kern zich stelt is nu: hoe moeten we $P(x)$ en $Q(x)$ kiezen, opdat enkele merkwaardige punten van de grafiek – te denken valt vooral aan nulwaarden en polen, extrema en buigpunten – voor hun x-coördinaten gehele waarden hebben en dus mooi zijn?
We lichten dit met een voorbeeld toe. We nemen $f(x) = \frac{A \cdot (x-a)}{(x-b)(x-c)}$.
Als nu $c = -2$, vragen we naar geschikte waarden van a en b. Met enig proberen kiezen we $a = 2$ en $b = 1$. Er komt $f(x) = \frac{A \cdot (x-2)}{(x-1)(x+2)}$.
Voor de extrema vinden we $x = 0$ en $x = 4$. Als nu nog $A = 9$ wordt gekozen, worden de uiterste waarden respectievelijk 9 en 1, dus mooi.
Maar dit was proberen! Het lijkt gewenst om een en ander systematisch aan te pakken.

3 We geven niet alle resultaten van Kern, slechts enkele. Over bewijzen praten wij nog niet; die volgen later.
We geven in elk der beschouwde gevallen de gevonden uitkomsten. De som der graden van teller en noemer moet 3 zijn. Dat kan op 4 manieren.
We krijgen de volgende types:

$$\text{type 1: } f_1(x) = A \cdot \frac{x-a}{(x-b)(x-c)} \qquad (1)$$

Hierbij veronderstellen we dat A, a, b en c gehele waarden hebben, terwijl uiteraard $A \neq 0$ is. De waarde van A beïnvloedt de door ons gezochte x-waarden niet; wel kunnen we door geschikte keuze van A bijvoorbeeld de uiterste waarden zelf geheel maken.

$$\text{type 2: } f_2(x) = A \cdot \frac{(x-b)(x-c)}{x-a} \qquad (2)$$

Bij type 1 en bij type 2 vinden we dezelfde waarden voor de x-coördinaten van de merkwaardige punten; maximum wordt minimum en omgekeerd (mits $\neq 0$). Voor nulwaarde en pool geldt dat ook.
A, a, b en c worden weer geheel verondersteld, en $A \neq 0$; dit zal ook bij de volgende types – stilzwijgend – worden aangenomen.

$$\text{type 3: } f_3(x) = A \cdot (x-a)(x-b)(x-c) \qquad (3)$$

Dit type is niet een echte gebroken functie, maar bij omkering verschijnt wel een echte gebroken functie.

$$\text{type 4: } f_4(x) = A \cdot \frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)} \qquad (4)$$

Ook de types 3 en 4 hebben dezelfde x-coördinaten voor de extrema; maximum wordt weer minimum

en omgekeerd (mits $\neq 0$) en voor nulwaarde en pool geldt hetzelfde.
Kern vond nu het volgende.

Kies voor de types 1 en 2 c geheel en vervolgens

$$a = tu^2 + c \text{ en } b = t(u^2 - v^2) + c \qquad (5)$$

Hierin zijn t, u en v geheel en $\neq 0$.
Voorbeeld: zij $c = -2$, $t = 1$, $u = 2$ en $v = 1$, dan komt er: $a = 2$ en $b = 1$.
De functie wordt in het geval van type 1:
$f_1(x) = A \cdot \dfrac{x-2}{(x-1)(x+2)}$
We hebben deze al eerder ontmoet.
Voor de types 3 en 4 geldt: kies c geheel en vervolgens

$$a = 3t(2uv - u^2) + c \text{ en } b = 3t(v^2 - u^2) + c \qquad (6)$$

Ook hierin zijn t, u en v geheel en $\neq 0$.
Voorbeeld: zij $c = 3$, $t = 3$, $u = 1$ en $v = 2$, dan komt er: $a = b = 30$.
De functie wordt in het geval van type 3:
$f_3(x) = A(x-3)(x-30)^2$.
De nulwaarden hiervan zijn 3 en 30. Extrema komen er voor $x = 30$ en $x = 12$.
Zelfs het buigpunt doet 'mooi' mee; de x-coördinaat daarvan is $x = 21$.

4 Het wordt tijd dat we met bewijzen komen. We nemen die niet over van Kern, althans voorlopig niet. We volgen de gedachtengang van enkele leden van de redactie van Euclides. Zo is van Dr. P. G. J. Vredenduin afkomstig de volgende behandeling van de types 1 en 2.
Als we uitgaan van (1) en (2) en differentiëren, en dan de afgeleide 0 stellen, krijgen we de vergelijking $x^2 - 2ax + (ab + ac - bc) = 0$.
Deze vergelijking moet gehele wortels hebben en dus moet de discriminant een kwadraat zijn. Met andere woorden: $4(a^2 - ab + bc - ac)$ moet een kwadraat zijn.
Nu is $a^2 - ab + bc - ac = (a - b)(a - c)$.
Wij slagen dus in onze opzet als wij $a - b = tv^2$ en $a - c = tu^2$ stellen.
Dan is bovengenoemde discriminant gelijk aan $4t^2u^2v^2$ en verder geldt $a = c + tu^2$ en $b = c + t(u^2 - v^2)$.

In het laatste herkennen wij de onder (5) genoemde uitdrukkingen.

De behandeling van de types 3 en 4 danken wij aan Dr. P. G. J. Vredenduin en de heer M. C. van Hoorn.

Als we uitgaan van (3) of (4) en differentiëren, en dan de afgeleide 0 stellen, krijgen we de vergelijking $3x^2 - 2(a + b + c)x + (ab + bc + ac) = 0$.
Hiervan moet de discriminant een kwadraat zijn; met andere woorden:
$4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$ moet een kwadraat zijn.
We stellen nu voorlopig $c = 0$ (hetgeen neerkomt op een horizontale translatie van de grafiek) en we vinden als voorwaarde:

$$a^2 + b^2 - ab = d^2 \qquad (7)$$

Deze voorwaarde kennen we uit een ander probleem. Wij stellen ons een driehoek ABD voor waarvan de hoek bij D gelijk is aan 60°, en vragen voor de zijdelengten a, b en d gehele getallen te kiezen.
Nu zegt de cosinusregel dat moet gelden: $d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 60°$, dus: $d^2 = a^2 + b^2 - ab$, en dit is juist formule (7).
Naar driehoeken met een hoek van 60° en gehele zijden is al heel wat onderzoek gedaan (het onderzoek naar driehoeken met een hoek van 90° en gehele zijden – de pythagoreïsche driehoeken – is weliswaar veel bekender). In een artikel in het tijdschrift Elemente der Mathematik [2] vinden wij de voorwaarde waaraan a en b moeten voldoen:
men neme $a = s(2uv - u^2)$ en $b = s(v^2 - u^2)$, met s, u en v geheel; in dat geval is namelijk $d^2 = s^2 \cdot (u^2 - uv + v^2)^2$, zoals we zonder moeite kunnen narekenen. Omdat a en b zijdelengten van driehoek ABD zijn, moeten deze getallen positief zijn; daarom moeten we veronderstellen $s > 0$ en $u < v$.
Nu gaat het ons niet om zo'n driehoek met een hoek van 60°, maar om de vraag of we de vergelijking $3x^2 - 2(a + b + c)x + (ab + bc + ac) = 0$ gehele wortels kunnen bezorgen.
We kunnen daarom de voorwaarden $s > 0$ en $u < v$ laten vervallen, maar vanwege de coëfficiënt 3 van de term met x^2 moeten we voor s een drievoud

nemen: $s = 3t$. Omdat we $c = 0$ hebben genomen vinden we:
$a = 3t(2uv - u^2)$ en $b = 3t(v^2 - u^2)$.
De wortels van de vergelijking
$3x^2 - 2(a + b + c)x + (ab + bc + ac) = 0$ zijn dan, in het geval $c = 0$: $x = t(2v - u)(v + u)$ en $x = 3tu(v - u)$.
Dit is gemakkelijk na te rekenen.
We geven nog een voorbeeld bij $c = 0$. Kies $t = 1$, $u = 1$ en $v = 4$. Dan is $a = 21$ en $b = 45$, en de extrema vinden we bij $x = 9$ en $x = 35$.
We merken tenslotte op dat we met $c \neq 0$ juist de onder (6) genoemde uitdrukkingen krijgen. Dat was onze bedoeling.
We zijn er in het voorgaande niet op uit geweest per se alle mogelijkheden te vinden. Met de resultaten die we geboekt hebben stellen we ons tevreden. Deze komen overigens overeen met die van Kern.

5 De titel van Kerns beschouwing houdt samenhang met kegelsneden in. We zullen deze samenhang met behulp van Kerns bewijs voor de typen 1 en 2 toelichten.

We beginnen met $f_1(x) = \frac{x - a}{x(x - b)}$; met a en b geheel.

Vervolgens: $f_1'(x) = \frac{-(x^2 - 2ax + ab)}{x^2(x - b)^2} = 0$.

De discriminant van $x^2 - 2ax + ab$ moet een kwadraat zijn en dat betekent dat $a^2 - ab = d^2$ voor een geheel getal d.
Als we $d = 0$ kiezen, krijgen we $a = 0$ of $a = b$;
als $a = 0$ is echter $f_1(x) = \frac{1}{x - b}$ en als $a = b$ is

$f_1(x) = \frac{1}{x}$ en in deze beide gevallen is de som van de graden van teller en noemer derhalve gelijk aan 1.
We willen evenwel dat deze som gelijk is aan 3.
We nemen daarom $d \neq 0$.
De vorm $a^2 - ab = d^2$ is te herleiden tot

$$\left(\frac{a}{d}\right)^2 - \left(\frac{a}{d}\right)\left(\frac{b}{d}\right) = 1.$$

Stellen we nu $X = \frac{a}{d}$ en $Y = \frac{b}{d}$; bovenstaande vergelijking wordt: $X^2 - XY = 1$.
Deze laatste vergelijking is de vergelijking van een hyperbool.
Daarmee zijn de kegelsneden ten tonele gevoerd.

Het gaat nu om punten op de hyperbool die rationale coördinaten hebben.

Uit $X^2 - XY = 1$ volgt dat $Y = X - \frac{1}{X}$

X moet rationaal zijn en dus de vorm $\frac{u}{v}$ hebben;

Y wordt dan $\frac{u^2 - v^2}{uv}$.

We hebben gesteld dat $X = \frac{a}{d}$ en $Y = \frac{b}{d}$; daaruit volgt dat $a = Xd$ en $b = Yd$. Als we voor d een veelvoud van uv nemen, zeg: $d = tuv$, dan vinden we voor a en b zeker gehele waarden: $a = tu^2$ en $b = t(u^2 - v^2)$.
Met $c \neq 0$ – dat blijft een kwestie van horizontaal verschuiven – komen we dan weer bij de onder (5) genoemde uitdrukkingen.
Daarmee is Kerns bewijs voltooid, voor de types 1 en 2.
Kerns bewijs voor de types 3 en 4 gaat in principe soortgelijk, al is het wel wat ingewikkelder. In plaats van een hyperbool wordt nu een ellips gevonden. Het bewijs laten we verder achterwege.

Literatuur

1 Dr. Hans Kern, *Spezielle rationale Funktionen und ihr Zusammenhang mit Kegelschnitten*, Praxis der Mathematik 29, Heft 4 (1987), 208-214.
2 H. Hasse, *Ein Analogon zu den ganzzahligen pythagoräischen Dreiecken*, Elemente der Mathematik 32, Nr. 1 (1977), 1-6.

(Opmerking van de redactie: de hierboven genoemde tijdschriften zitten beide in de leesportefeuille van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren).

Over de auteur:

Dr. J. T. Groenman studeerde wiskunde in Groningen (1928-1934) en promoveerde in 1950 in Delft (promotor Prof. Dr. O. Bottema). Hij is oud-rector van de Rijks Scholengemeenschap 'Kamerlingh Onnes' te Groningen.

De 26e Nederlandse Wiskunde Olympiade 1987

Henk Schuring

De eerste ronde

Op vrijdag 20 maart 1987 is de eerste ronde gespeeld. Aan alle scholen voor havo en vwo is verzocht leerlingen van niet-eindexamenklassen in de gelegenheid te stellen hieraan mee te doen. Gedurende drie uur konden de deelnemers proberen 13 opgaven op te lossen. Alleen goede antwoorden telden mee. Het maximaal te behalen puntenaantal was 36.
De wedstrijdleiders van 216 scholen hebben het resultatenformulier tijdig opgestuurd, zodat het resultaat van 2059 deelnemers in onderstaand overzicht verwerkt kon worden.
De cesuur is gelegd bij score 15, wat zeggen wil dat de deelnemers die 15 of meer punten behaalden, worden uitgenodigd voor de tweede ronde.
Van deze 89 deelnemers waren er 69 leerling van 5 vwo, 18 leerling van 4 vwo, 1 leerling van 3 vwo en 1 leerling van 2 vwo.
De speciale prijs voor de school waarvan de som van de scores van de beste drie deelnemende meisjes de hoogste is van alle scholen is gewonnen door het Kottenpark College te Enschede. De drie meisjes behaalden samen 32 punten.
De wisselprijs voor de school met het hoogste puntentotaal van de beste vijf deelnemers van die school is gewonnen door het Dominicus College te Nijmegen. De vijf deelnemers behaalden samen 85 punten.
Doordat vijf deelnemers aan de Pythagoras Olympiade ook in aanmerking kwamen om aan de tweede ronde mee te doen, zijn 94 leerlingen uitgenodigd.

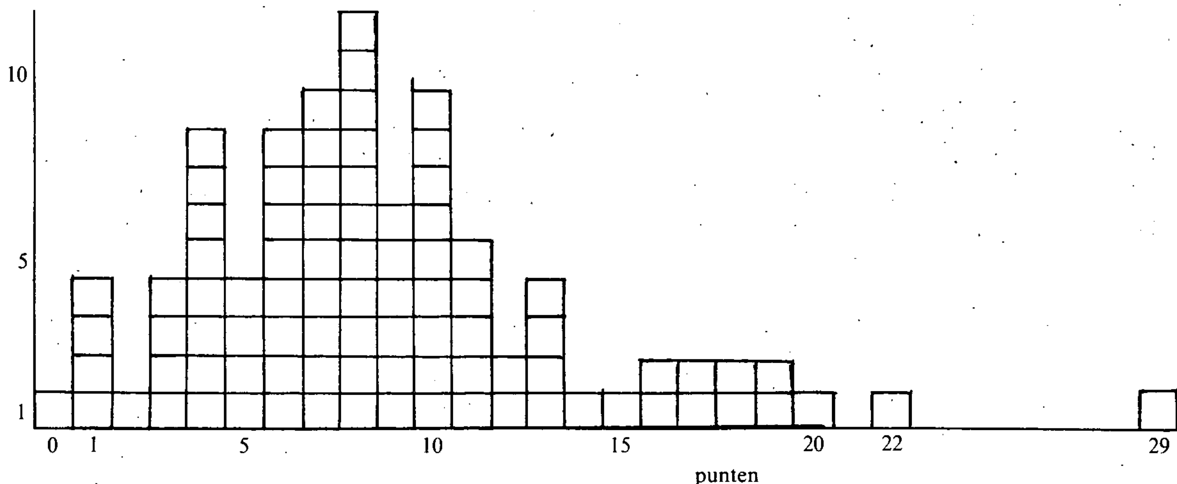
score	frequentie	cumulatieve frequentie
30	2	2
29	1	3
28	1	4
27	4	8
26	–	8
25	1	9
24	1	10
23	–	10
22	9	19
21	7	26
20	7	33
19	5	38
18	4	42
17	12	54
16	14	68
15	21	89
14	26	115
13	49	164
12	37	201
11	74	275
10	58	333
9	135	468
8	106	574
7	162	736
6	176	912
5	231	1143
4	141	1284
3	146	1430
2	318	1748
1	44	1792
0	267	2059

De tweede ronde

Op 11 september 1987 is in Eindhoven de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade gehouden. Van de 94 uitgenodigde leerlingen hebben er 91 deelgenomen. Zij hadden drie uur de tijd om vier opgaven op te lossen. De maximale score per opgave was 10 punten.
Door bij gelijke eindscore rekening te houden met het behaalde puntenaantal in de eerste ronde, zijn de volgende tien deelnemers prijswinnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1987:

		tweede ronde	eerste ronde
1	Joris v.d. Hoeven, Amsterdam	29 pnt.	21 pnt.
2	Jan Zwanenburg, Drachten	22 pnt.	28 pnt.
3	Erik Fledderus, Wolvega	20 pnt.	24 pnt.
4	Maarten Hilferink, Vianen	19 pnt.	29 pnt.
5	Michael Cijsouw, Beek	19 pnt.	Pythagoras
6	Richard Huveneers, Amersfoort	18 pnt.	27 pnt.
7	Ronald Wanink, Hoogeveen	18 pnt.	Pythagoras
8	Jeroen Paasschens, Bladel	17 pnt.	27 pnt.
9	Harm Derksen, Ottersum	17 pnt.	16 pnt.
10	Arthur Elzinga, De Waal Texel	16 pnt.	20 pnt.

Het onderstaande staafdiagram geeft een overzicht van de scores van alle deelnemers aan de tweede ronde:



Opgaven tweede ronde

1 Bepaal alle drietallen (a, b, c) van positieve gehele getallen die voldoen aan $a^2 = 2^b + c^4$ waarbij tevens geldt dat a oneven is.

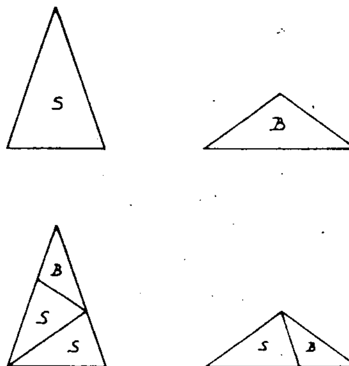
2a Bewijs dat voor alle $x > 0$ geldt

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

b Bewijs dat voor alle gehele getallen $n \geqq 2$ geldt dat

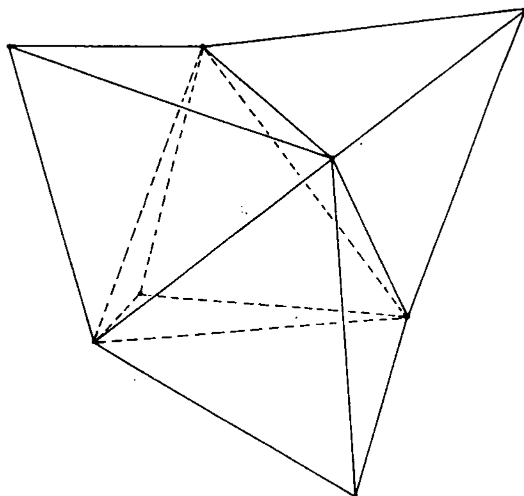
$$1 < 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2.$$

3 In het platte land Pentagonië leven twee soorten wezens: de Spitsen (S) en de Botten (B).
Ze hebben allemaal de vorm van een gelijkbenige driehoek: de Spitsen hebben een tophoek van 36°, de Botten een tophoek van 108°.
Elk jaar op *Grote Verdelingsdag* (11 september) verdelen ze zich in stukken: elke S in twee kleinere S'en en een B; elke B in een S en een B.
In de loop van het jaar groeien ze dan weer tot volwassen proporties.



In een ver verleden is de bevolking ontstaan uit één B-wezen. Sterfgevallen komen niet voor.
Onderzoek of de verhouding tussen het aantal Spitsen en het aantal Botten op den duur tot een limietwaarde nadert en zo ja, bereken dan die limietwaarde.

4 Op elk zijvlak van een regelmatig viervlak met ribben van lengte 1 construeert men precies zo'n viervlak. Zo ontstaat een twaalfvlak met 8 hoekpunten en 18 ribben (zie figuur).
We denken ons in dat het twaalfvlak hol is.
Bereken de lengte van het grootste lijnstuk dat geheel binnen dit twaalfvlak past.
Motiveer je antwoord.



Oplossingen

1 $a^2 = 2^b + c^4$, dus $a^2 - c^4 = 2^b$ en
$(a - c^2)(a + c^2) = 2^b$.
Hieruit volgt dat er gehele getallen p, q zijn met $p \geqq 0, q \geqq 1$ zo dat $a - c^2 = 2^p, a + c^2 = 2^{p+q}$ (1)
Optellen: $2a = 2^p(1 + 2^q)$.
Omdat a oneven is, volgt hieruit $p = 1$, dus $a = 1 + 2^q$.
Aftrekken van (1) geeft nu $2c^2 = 2 \cdot (2^q - 1)$, dus $c^2 + 1 = 2^q$.
Omdat $q \geqq 1$, is c oneven. Stel $c = 2d + 1$. Dan $(2d + 1)^2 + 1 = 2^q$ en $4d^2 + 4d + 2 = {}^q$. Het linkerlid is een viervoud + 2, het rechterlid is een viervoud, tenzij $q = 1$.
Dan is $4d^2 + 4d = 0$, dus $d = 0$.
Conclusie: $a = 1 + 2^q = 3$
$b = 2p + q = 3$
$c = 2d + 1 = 1$.

2a $1 = (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$, dus de ongelijkheid volgt uit

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

b Uit a volgt:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2\sqrt{k+1}} < (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) +$$
$$+ \ldots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \sqrt{n} - 1 < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

De eerste ongelijkheid kan geschreven worden als (vervang k + 1 door k):

$\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < \sqrt{n} - 1$ en hieruit volgt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} - 1 \qquad (1)$$

De tweede ongelijkheid geeft $2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2$

dus ook $2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2.$ (2)

Combinatie van (1) en (2) voltooit het bewijs.

3 Noem de aantallen S en B in het n-de jaar respectievelijk S_n en B_n, dan kunnen we de volgende tabel opstellen:

n	B_n	S_n	$\frac{S_n}{B_n}$
0	1	0	0
1	1	1	1
2	2	3	1,5
3	5	8	1,6
4	13	21	1,615
5	34	55	1,6176
...	...	...	...

Dit wekt het vermoeden dat in de rij $B_0, S_0, B_1, S_1, B_2, S_2, \ldots$ elke term ontstaat als som van de twee voorafgaande termen. Inderdaad volgt uit de formulering van de opgave
$S_{n+1} = B_n + 2S_n = B_n + S_n + S_n = B_{n+1} + S_n$
en $B_{n+1} = B_n + S_n$.

Schrijf de rij daarom in de vorm
$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ (zodat $x_{2n} = B_n$, $x_{2n+1} = S_n$).
Dan geldt:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \ (n \geqq 0) \qquad (1)$$
$$x_0 = 1, x_1 = 0.$$

Het gaat nu om de quotiënten $q_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$ (in het bijzonder voor even n).
Delen we (1) door x_{n+1}, dan zien we dat

$$q_{n+1} = 1 + \frac{1}{q} \ (n \geqq 2) \qquad (2)$$

met $q_2 = 1$. Het is duidelijk dat $q_n > 1$ voor alle $n_n > 2$.
Nadert q_n tot een limiet als $n \to \infty$?
Als zo'n limiet bestaat: $L = \lim_{n \to \infty} q_n$, dan volgt uit (2)

dat $L = 1 + \frac{1}{L}$ (3)

(laat $n \to \infty$ in (2)).
Deze vergelijking heeft twee oplossingen: $L = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
Alleen de oplossing met het plusteken kan voldoen, dus als de limiet L bestaat, dan moet gelden dat

$$L = \lim_{n \to \infty} q_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Definieer nu inderdaad $L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Omdat (3) geldt, kunnen we de vergelijkingen (2) en (3) van elkaar aftrekken:

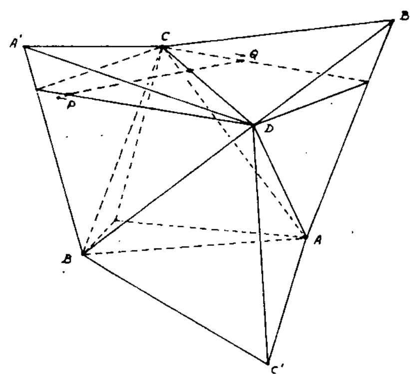
$$q_{n+1} - L = (1 + \frac{1}{q_n}) - (1 + \frac{1}{L}) = \frac{-1}{q_n L}(q_n - L).$$

Het verschil $|q_n - L|$ wordt dus bij elke stap met een factor $\left|\frac{-1}{q_n L}\right| < \frac{1}{L} = 0{,}618\ldots$ verkleind, zodat

$\lim_{n \to \infty} (q_n - L) = 0$, dus $\lim_{n \to \infty} q_n = L$ en ook

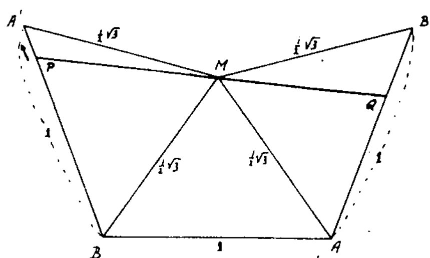
$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{B_n} = \lim_{n \to \infty} q_{2n} = L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

4 Noem het centrale viervlak $ABCD$ en noem de vier andere hoekpunten A', B', C', D', waarbij A' het spiegelbeeld is van A in vlak BCD, etc.
Als PQ een lijnstuk is van maximale lengte, dan zullen P en Q in zijvlakken liggen van het twaalfvlak.



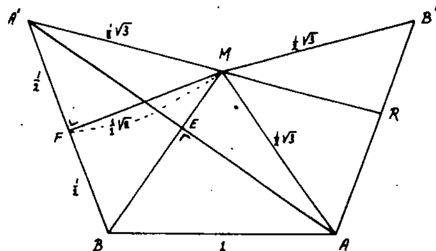
Er zijn twee mogelijkheden:
1 Zo'n maximaal lijnstuk snijdt een inspringende ribbe, bijvoorbeeld CD.
2 Zo'n maximaal lijnstuk snijdt geen inspringende ribben.

Geval 1.
Het vlak door PQ en CD snijdt het twaalfvlak dan volgens een vierhoek die bestaat uit twee gelijkbenige driehoeken met als gemeenschappelijke basis de ribbe CD.
Het lijnstuk van maximale lengte in zo'n vierhoek is de andere diagonaal. Die bevindt zich in het vlak $A'BAB'$ en gaat door het midden M van CD. De maximale situatie hierbij doet zich voor als bijvoorbeeld $P = A'$.



Geval 2.
Als PQ geen inspringende ribben snijdt en maximale lengte heeft, dan moeten P en Q met hoekpunten van het twaalfvlak samenvallen. De maximale situatie doet zich dan dus voor als bijvoorbeeld $P = A'$, $Q = A$.

Vergelijken van geval 1 en geval 2 komt dus neer op het vergelijken van de lijnstukken $A'R$ en $A'A$ in nevenstaande figuur. Een nauwkeurige tekening laat zien dat $AA' > A'R$, dus AA' is een lijnstuk van maximale lengte. (Iemand die zijn tekening niet vertrouwt, kan ook de hoeken van $\triangle A'AR$ berekenen en constateren dat $\angle A'RA$ groter is dan $\angle A'AR$, dus $A'A > A'R$).



Let er overigens op dat de punten *F*, *M* en *B'* *niet* op één lijn liggen!
We berekenen tenslotte de lengte van $A'A$:
Volgens Pythagoras is $MF = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, dus opp.
$A'MB = \frac{1}{2} \cdot MF \cdot A'B = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot A'E \cdot MB =$
$= \frac{1}{2} \cdot A'E \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
Hieruit volgt: $A'E = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$, dus
$A'A = \frac{2}{3}\sqrt{6} = 1{,}633\ldots$
Voor de volledigheid nog de berekening van de hoeken van driehoek $A'AR$: $\cos \angle EA'B = \frac{1}{3}\sqrt{6}$, dus $\angle EA'B \approx 35°16'$ en $\angle A'BE \approx 54°44'$, dus
$\angle MA'E \approx 54°44' - 35°16' = 19°28'$
$\angle A'AR \approx 19°28' + 54°44' = 74°12'$
$\angle A'RA \approx 180° - 19°28' - 74°12' = 86°20'$.

De kwadratuur van de cirkel

P. Hustinx

Eeuwenlang, reeds vanaf de oudheid, hebben velen zich verdiept in drie meetkundige constructies: de trisectie van de hoek, de verdubbeling van de kubus, en de kwadratuur van de cirkel. Inmiddels weten we dat geen van deze drie constructies uitvoerbaar is met passer en liniaal.
Dat wil nog niet zeggen dat deze constructies ook op andere wijzen onuitvoerbaar zouden zijn. In de tweede jaargang van het tijdschrift Pythagoras wordt, in enkele artikelen en in enkele reacties daarop, ingegaan op de trisectie van de hoek en op de verdubbeling van de kubus. Onder meer de welbekende trisectrix van Mac Laurin komt daarin ter sprake.[1] In deze jaargang van Pythagoras blijkt overduidelijk dat 'onuitvoerbaarheid' van een constructie een betrekkelijke zaak kan zijn. Het is maar wat je wilt verstaan onder een 'constructie'.
Het is geen wonder dat de kwadratuur van de cirkel in bovengenoemde serie artikelen heeft ontbroken. Bij de kwadratuur van de cirkel gaat het immers om een vierkant met oppervlakte π. Juist het voorkomen van het getal π gooit roet in het eten, daar dit getal, zoals bekend, onmeetbaar is. Een definitie of omschrijving van onmeetbaarheid moge hier achterwege blijven, maar duidelijk is wel, dat de kwadratuur van de cirkel niet in zulke mooie, eenvoudige formules als $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$ (bij de trisectie van de hoek) dan wel $x^3 = 2a^3$ (bij de verdubbeling van de kubus) gevangen kan worden. Wie voldoende optimisme bezit, zal 'onuitvoerbaarheid' het liefst interpreteren als 'bijna-uitvoerbaarheid'. Met andere woorden: als een constructie niet precies uit te voeren is met passer en liniaal, dan is er wellicht een benaderingsconstructie te vinden, die qua praktische waarde niet of nauwelijks onder

doet voor de precieze constructie. Gesterkt door zulk optimisme heb ik gezocht naar benaderingsconstructies voor de trisectie van de hoek, de verdubbeling van de kubus en de kwadratuur van de cirkel. Over de resultaten die ik vond kan men het een en ander vinden in het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en in Praxis der Mathematik.[2]
De benaderingsconstructie voor de kwadratuur van de cirkel beviel mij nog niet geheel; de nauwkeurigheid die ik vond (0,07%) leek mij voor verbetering vatbaar. Door trial & error kwam ik op de bijgaande, veel nauwkeuriger benadering. De nauwkeurigheid is 0,0004%.

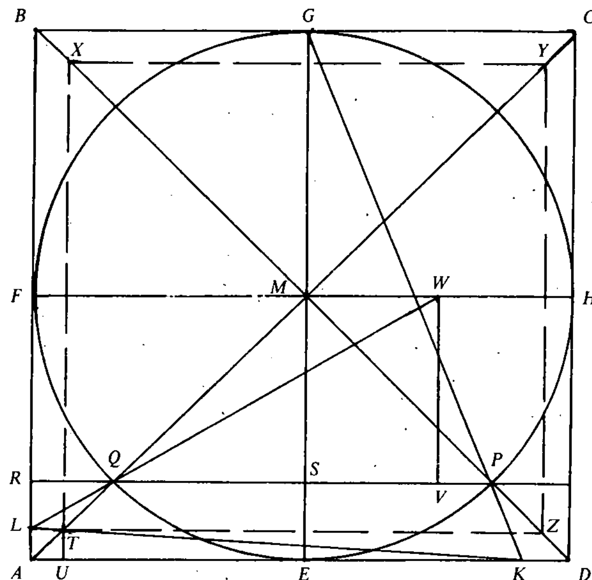
De constructie

De constructie verloopt als volgt.
Teken eerst een cirkel met straal 1 (en dus oppervlakte π); het middelpunt van de cirkel is M (figuur 1).
Teken om de cirkel heen een vierkant $ABCD$ met zijde 2, dat de cirkel raakt in de punten E, F, G en H.
W is het midden van MH, P en Q zijn snijpunten van de cirkel met de diagonalen BD en AC.
Trek nu GP door tot het snijpunt K met AD.
Trek dan WQ door tot het snijpunt L met AB.
Snijd KL met AC (snijpunt T) en teken vierkant $TXYZ$.
De oppervlakte van vierkant $TXYZ$ is nu bij benadering gelijk aan π.

In de hierna te schetsen berekening spelen nog een rol: lijnstuk WV (evenwijdig aan GE) en punt U (gelegen op het verlengde van XT).
Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken GSP en GEK volgt dat $EK = 2\sqrt{2} - 2$
Dan volgt uit de gelijkvormigheid van de driehoeken QRL en QVW dat $RL = 3 - 2\sqrt{2}$
Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken LAK en TUK, gevoegd bij de gelijkheid van de lijnstukken TU en AU, volgt dan dat $TU = \dfrac{23\sqrt{2} - 29}{31}$ en zo blijkt tenslotte dat $TX = \dfrac{120 - 46\sqrt{2}}{31}$
De oppervlakte van vierkant $TXYZ$ is nu
$TX^2 = \dfrac{18632 - 11040\sqrt{2}}{961}$ en deze oppervlakte is, afgerond, gelijk aan 3,1416049.
De afwijking van π is ongeveer 0,0004%.

Noten

1 Pythagoras, Tweede jaargang (1962-1963).
2 Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 64 (1977), blz. 319.
Praxis der Mathematik 18 (1978), blz. 178-180.
Praxis der Mathematik 18 (1978), blz. 234-235.



Opmerking van de redactie

De door de heer Hustinx gevonden benaderingsconstructie bezit een zeer hoge graad van nauwkeurigheid. Bovendien is de constructie zeer elementair: in de getekende figuur zijn slechts drie hulplijnen nodig (te weten de lijnen GP, WQ en KL).
Wij zeggen bij dezen eenieder die een nog nauwkeuriger en eveneens elementaire benaderingsconstructie vindt, publicatie daarvan in Euclides toe.

Over de auteur:

De heer P. Hustinx is nagenoeg 40 jaar werkzaam geweest als chemisch technicus in de levensmiddelenindustrie. Wiskunde is zijn hobby. Hij stelt er prijs op de heer M. C. van Hoorn dank te zeggen voor diens hulp bij de totstandkoming van dit artikel.

De rekenmachine als didactisch hulpmiddel

J. J. Breeman

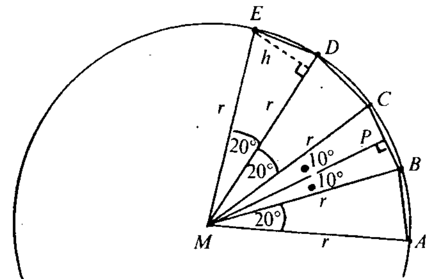
De eenvoudige rekenmachine is nu al enige jaren in gebruik. Het is opmerkelijk dat de schoolboeken nog zo weinig de voordelen die het apparaat met zich mee brengt, weten uit te buiten. De examens zullen wat dat betreft ook hun invloed hebben, immers daar is het pakken van het apparaat en er iets mee doen slechts aan de orde als het een afsluitende handeling betreft, zoals het benaderen van een eindantwoord.

Ik veronderstel dat veel collega's met mij ontdekt hebben, dat de rekenmachine ook bij het leren hanteren van (nieuwe) begrippen in belangrijke mate steun kan verlenen.
De problemen die straks genoemd worden, kunnen, als het om het resultaat zou gaan, in de meeste gevallen met een zeer kort computerprogramma opgelost worden. Dat is mooi, maar het is niet wat ik wil; het resultaat is vanzelfsprekend belangrijk, nog belangrijker is het proces naar het resultaat. Bij dit proces moet de leerling het gevoel krijgen: *ik heb het ontdekt.*
Het is natuurlijk wel leuk om ze later hun eigen ontdekkingen met de computer te laten controleren.

Voor een goed begrip nog enige opmerkingen vooraf:
- ik heb uitsluitend op het oog het gebruik van de gewone (niet-programmeerbare) rekenmachine die iedere leerling doorgaans bij zich heeft
- de voorbeelden komen voor het merendeel uit het programma voor 4-atheneum
- een klas is vaak zeer gemengd van samenstelling, een abstract bewijs is voor veel leerlingen nog iets waar ze niet aan toe zijn; hun bekendheid met notaties is in de voorkomende gevallen nog zo pril dat het doorzien van verbanden in een bewijs voor hen te hoog gegrepen is; voor het vinden van de resultaten in de voorbeelden gebruik ik daarom liever de term *bevestigen,* het bevestigen door te handelen met je rekenmachine heeft naar ik meen voor hen meer overtuigingskracht dan een abstract bewijs.

1 Omtrek en oppervlakte van een cirkel

De geboorte van π kan op simpele wijze in de klas plaatsvinden door te letten op de omtrek van een regelmatige veelhoek.
$BC = 2BP = 2r\sin 10° = 0{,}347296r$
dus omtrek 18-hoek $= 18 \cdot BC = 6{,}2513316r$ daarna 180-hoek, 1800-hoek enz. Hoera!



Overeenkomstig met de oppervlakte.
opp. $\triangle MDE = 0{,}5 \cdot h \cdot r = 0{,}5 \cdot r \cdot \sin 20° \cdot r =$
$= 0{,}17101r^2$
opp. 18-hoek $= 18 \cdot 0{,}17101r^2 = 3{,}07818r^2$
daarna aantal hoekpunten naar ∞

2 Ontwikkeling van het limietbegrip

In de aanloop naar de differentiaalrekening staan we uitgebreid stil bij het zogenaamde type 0/0.
Nadrukkelijk beperken we ons niet tot die situaties waarin het berekenen van de limiet mogelijk is door

vereenvoudiging (of een truc) toe te passen.

bv. $\lim_{h \to 1} (h^3 - 1)/(h - 1)$
(de ontbinding $(h - 1)(h^2 + h + 1)$ is onbekend)

Met de rekenmachine gaan we simpel op zoek; door te kijken naar de uitkomsten voor
$h = 1{,}01$ $h = 1{,}001$ $h = 1{,}0001$
$h = 0{,}99$ $h = 0{,}999$ $h = 0{,}9999$
ontdekt de klas (en let wel, iedere leerling handelt zelf!) dat de gevraagde limiet gelijk is aan 3.

Op overeenkomstige wijze wordt ontdekt:

$\lim_{h \to 2} (h^3 + h^2 - 12)/(h^2 - 4) = 4$
(factorstelling niet nodig)

$\lim_{h \to 0} (\sqrt{1 + h} - 1)/h = 0{,}5$ (worteltruc niet nodig)

$\lim_{h \to 0} ((2 + h)^5 - 32)/h = 80$
(driehoek van Pascal niet nodig)

Heel belangrijk hierbij is dat de leerlingen op deze manier voortdurend met het wezenlijke van het limietbegrip bezig zijn.

3 Inleiding tot het differentiëren

In het door ons zelf ontworpen leerlingenmateriaal letten we op de aspecten:
- aflezen van veranderingen in grafieken
- verbanden tussen aangroeiingen
- betekenis van de raaklijn in verband met kleine aangroeiingen
- eerste graads benaderingen[1], wij leggen hier veel nadruk op, omdat wij hiermee de regels voor het differentiëren (somregel, produktregel, kettingregel) verklaren en later ook gebruiken als instap naar de integraalrekening (zie 6)
- stijgen en dalen

Nadat we hebben stilgestaan bij de gehele rationale functies, sluiten we de eerste kennismaking af door aan de hand van $f'(x) = \lim_{h \to 0} (f(x + h) - f(x))/h$ ondersteund door grafieken via tabellen met de rekenmachine (zie 2) door de leerlingen te laten ontdekken

x	1	4	9	25	100	3
$f(x) = \sqrt{x}$	1	2	3	5	10	$\sqrt{3} = 1{,}732$
$f'(x)$	1/2	1/4	1/6	1/10	1/20	$0{,}289 = 1/(2\sqrt{3})$

dus $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$.
Op overeenkomstige wijze komt tevoorschijn:
$f(x) = 1/x$ heeft $f'(x) = -1/x^2$
en ook $f(x) = \sin x$ heeft $f'(x) = \cos x$.
Hierbij komt uitstekend tot zijn recht dat de bovenstaande bewering alleen geldt indien we werken met 'radialen'.

4 Exponentiële en logaritmische functies; groei

Na hetgeen zich heeft afgespeeld bij het vorige onderwerp is het een openbaring hoe gemakkelijk ontdekt wordt:

x	0	1	2	10
$f(x) = 2^x$	1	2	4	1024
$f'(x)$	0,693	1,386	2,772	710

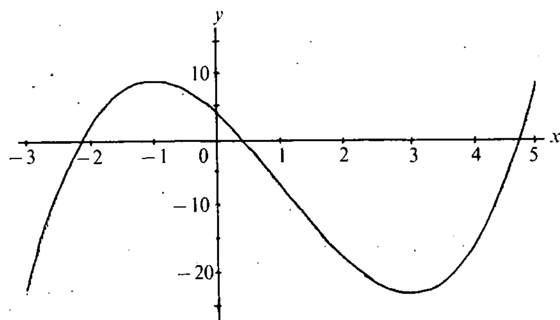
$f(x) = 2^x$ heeft als afgeleide $f'(0) \cdot 2^x = 0{,}693 \cdot 2^x$
Hetzelfde kan gezegd worden van $f(x) = {}^2\log x$ heeft als afgeleide $1{,}443/x$.
Natuurlijk sta je stil bij het verband tussen 0,693 en 1,443 (ook meetkundig!). Je hebt moeite om af te blijven van het getal e en de natuurlijke logaritme. Vanzelfsprekend is eerder bij het invoeren van logaritmen ogenblikkelijk verteld hoe met de rekenmachine getallen als ${}^2\log 3$ en ${}^{1{,}5}\log 700$ benaderd kunnen worden, zodat alle aandacht steeds gericht kan worden op het feit dat een logaritme een exponent is. Door dit besef behoren de bekende eigenschappen voor de leerlingen niet meer, zoals vroeger vaak het geval was, in de categorie geheimtaal.
Aspecten van groei en met name het letten op de tijdsgebonden groeifactor worden met de machine in een handomdraai duidelijk. Een rente van 1%

per maand herkennen de leerlingen snel als voordeliger voor de belegger dan een rente van 12,5% per jaar. Het berekenen van de verdubbelingstijd levert ook geen problemen:
$1{,}01^x = 2$ geeft $x = {}^{1{,}01}\log 2 = 70$.

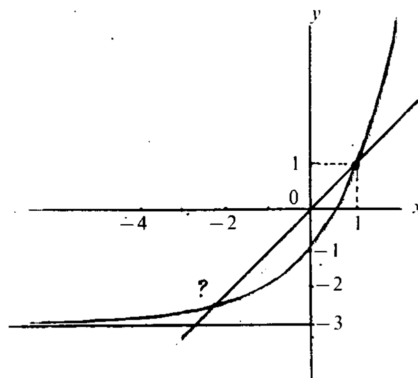
5 Het benaderen van oplossingen

Door de jaren heen zijn de leerlingen bijna uitsluitend problemen voorgelegd waarvoor een oplossingsmethode bestond die leidde naar een exacte oplossing. Bovendien werd hen het nadenken over situaties onthouden, als de ingrediënten voor zo'n exacte oplossingsmethode nog niet behandeld waren.
De rekenmachine stelt ons in staat om een veel ruimer aanbod van zinnige vragen te doen.
Een tweetal voorbeelden:

a $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$.
Het tekenverloop van $f'(x)$ geeft geen problemen, echter wel het tekenverloop van $f(x)$. Uit het stijgen/dalen van de grafiek blijkt dat de functie 3 nulpunten moet bezitten. Exacte berekening hiervan gaat niet op leerlingenniveau; het gevolg hiervan is dat we vanuit ons verleden een dergelijke functie maar niet aan de leerlingen voorschotelen. Maar wat is er op tegen om de nulpunten in bijvoorbeeld 2 decimalen nauwkeurig te berekenen? Gewoon gokken aan de hand van het plaatje (bijvoorbeeld $x = 4{,}7$), het f-beeld uitrekenen, van je fouten leren (dus letten op + of −) enz.



b $f(x) = 2^{x+1} - 3$
De grafiek snijdt de lijn $y = x$ in het punt (1,1). Het plaatje leert dat er nog een tweede snijpunt is, waarvan de x-coördinaat tussen −3 en −2 gezocht moet worden.



Alweer gokken en van je fouten leren (in samenhang met het plaatje) levert een heel aardige benadering voor de coördinaten.
Dat hier slimmere methoden zijn dan deze 'trial and error'-methode is mij bekend, behandeling ervan is naar mijn mening voor 4 vwo niet opportuun.

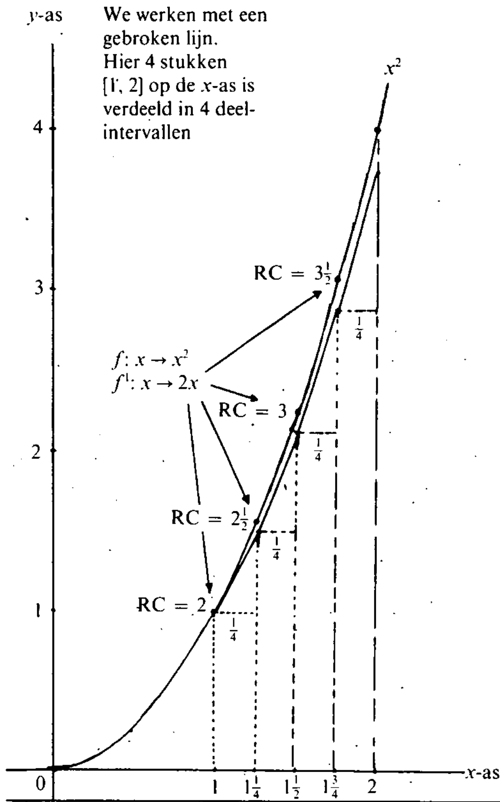
6 Inleiding tot de integraalrekening

Al heel vroeg in de 5e klas vwo behandelen wij iets van de integraalrekening, dit met oog op het kunnen toepassen bij het vak natuurkunde.
Om systeemscheiding (wiskunde-natuurkunde) te vermijden is onze introductie als volgt:

- we herhalen de methode van de eerste-graads benadering
- we merken op dat deze slechts gebruikt kan worden bij kleine toenames van x
- we maken een kort uitstapje naar hogere graads benaderingen (ook zo gemakkelijk met de machine)
- we voeren de 'gebroken lijn methode' in, hetgeen inhoudt:
  a we gebruiken slechts $f'(x)$
  b *tussentijds passen we de helling aan*, daarbij hebben we het x-interval opgedeeld in een (groot) aantal deelintervallen
  c op deze wijze ontstaat op heel natuurlijke wijze $f(b) - f(a)$ (de aangroeïng van een functie) is gelijk aan lim $\Sigma f'(x) \cdot \Delta x$
  d blikwisseling voor de komende problemen: in de praktijk krijg je te maken met een sommatie, de limiet is gelijk aan de aangroeiing van de primitieve

Het zal duidelijk zijn dat ook hier het gebruik van

de rekenmachine in belangrijke mate bijdraagt in de begripsvorming.



Waarschijnlijk kunnen anderen uit hun ervaring meer voorbeelden geven van situaties waarin de rekenmachine een wezenlijke bijdrage levert. Ik hou me aanbevolen.

Noot

1 ter verduidelijking: benader $2{,}004^3$ direct met de rekenmachine … 8,048096 m.b.v. eerste graads benadering
$f(x) = x^3$ en $f'(x) = 3x^2$
$f(2{,}004) = 8 + 12 \cdot 0{,}004 = 8{,}048$

Over de auteur:

Jan Breeman is als leraar wiskunde verbonden aan de Samenwerkingsschool van havo/atheneum te Waddinxveen.

Boekbespreking

Mathe-plus, uitg. Bibliographisches Institut, Mannheim.

'Ein seit Jahren beklagter Mangel ist behoben: Es gibt jetzt auch in der Bundesrepublik Deutschland eine mathematische Schülerzeitschrift, die bei den Schülern Interesse und Freude am mathematischen Tun fördert, Verständnis für Wesen und Bedeutung der Mathematik erweckt unf mit vielen Aufgaben an Techniken des Problemlösens heranführt.
... Die Zeitschrift enhält u.a. ein reichhaltiges Angebot von Übungsaufgaben, z.T. mit Lösungen bzw. Alternativen der Lösungsstrategien. ... 'Mathe-plus' bringt auch kleinere Abhandlungen zu mathematischen Fragen, die mit Kenntnissen der Schulmathematik zu verstehen sind. Nach Möglichkeit sind die historischen Fragestellungen und der Bezug zu Persönlichkeiten und kulturellem Umfeld ebenso berücksichtigt wie die Bezüge zu Technik, Natur und zu den Künsten.
Vielfach werden Aufgaben zur Festigung des Gegenstandes und zur Weiterführung gestellt. 'Mathe-plus' enthält die Berichte und Mitteilungen vom Bundeswettbewerb Mathematik und ausführliche Diskussionen ausgewählter Aufgaben. 'Mathe-plus' bringt darüber hinaus Aufgaben, die mehrere Lösungen ermöglichen, originelle Probleme, Anekdoten über Mathematiker, Denksportaufgaben und vieles mehr.'
De uitgever kondigt met dit alles een ambitieus programma aan. Nu de eerste jaargang geheel is verschenen kunnen we de balans opmaken. Er kan gezegd worden dat het tijdschrift volledig aan de gewekte verwachtingen heeft voldaan. Een greep uit de opgenomen artikelen:
Von Befreundeten und geselligen Zahlen; Winkeldrittelung und Konchoide; Manipulationen am Computer; Spiegelung und Musik; Zahlenlotto zwischen Theorie und Ausspielung; Die Zissoide oder 'Efeuartige': Schönheitmathematisch vermessen; Die Fusspunktkurven der Parabel; Quadratische Gleichungen mit dem Computer gelöst; Das regelmässige Siebzehneck und der achtzehnjährige Gauss; Wie krumm ist eine Kurve; en vele andere grotere en kleinere bijdragen.
Het tijdschrift ziet er zeer aantrekkelijk uit. Het verschijnt vijf keer per jaar, in de zomer als dubbelnummer. Per aflevering kost het DM 5,– (het dubbelnummer DM 9,80), een abonnement kost DM 25 per jaar (exclusief verzendkosten). Te verkrijgen bij Bibliographisches Institut, Dudenstrasse 6, 6800 Mannheim 1.

W. Kleijne

Wiskundig knopen onderscheiden

Henk Nieland

Nieuwe methode wekt interesse van biologen

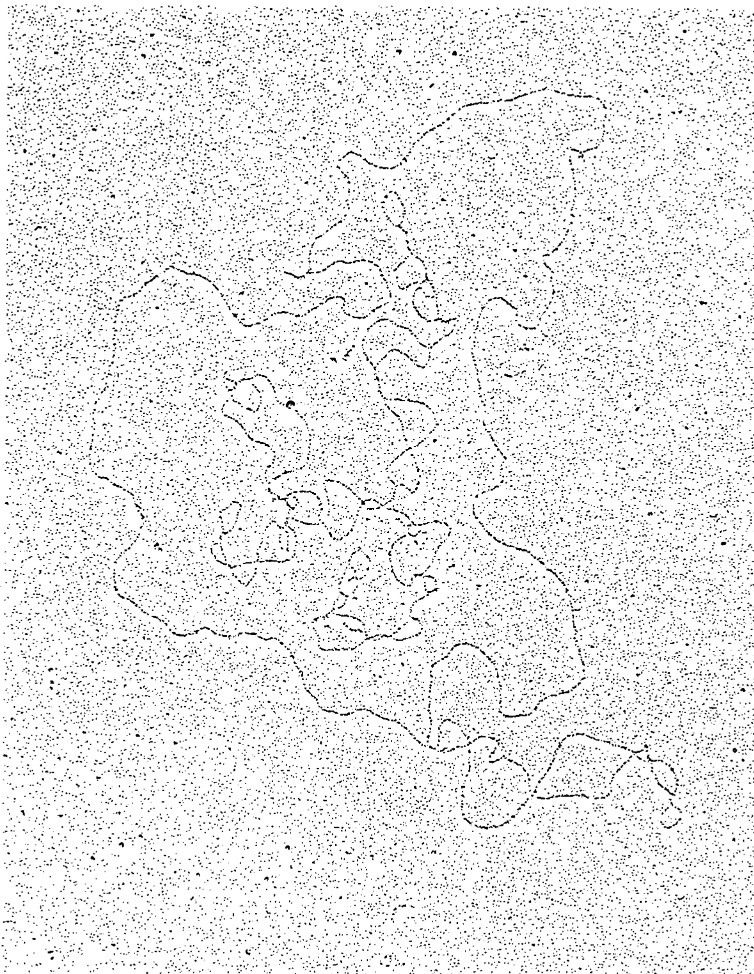
Hoe kom je er achter of twee willekeurige, ingewikkelde knopen eigenlijk hetzelfde zijn of niet? Dat is een oud, en tot nu toe onopgelost wiskundig probleem. Onlangs is deze puzzel een grote stap dichter bij zijn oplossing gekomen. De uit Nieuw-Zeeland afkomstige Amerikaanse onderzoeker Vaughan Jones vond een manier waarmee veel meer knopen van elkaar zijn te onderscheiden dan voordien mogelijk was. Hoewel wiskundig ook zeer interessant kwam de ware opwinding echter uit de hoek van de biologie. Deze methode sluit namelijk nauw aan bij de wijze waarop de verdubbeling en recombinatie van een DNA-molecuul – de drager van onze erfelijke eigenschappen – zich voltrekken.

Kink

Een DNA-molecuul heeft een langgerekte vorm. De lengte variëert, afhankelijk van het organisme, van drie duizendste centimeter tot enkele centimeters, de doorsnee is ongeveer een miljoenste millimeter. De ruimte die DNA-moleculen beslaan heeft meestal veel kleinere afmetingen dan hun lengte. Bij de mens ligt het (centimeters lange) DNA-molecuul opgevouwen in een celkern met een doorsnede van slechts enkele duizendste millimeters. In de cel moet zo'n molecuul dus wel een zeer compacte vorm hebben.
Bij een celdeling moet het DNA-molecuul zich eerst ontwinden en de nieuwe moleculen moeten zich weer in een kleine ruimte samenpersen en opwinden. Als dat niet goed gebeurt, als er bijvoorbeeld een 'kink in de kabel' komt, of als het DNA breekt, dan sterft de cel. Daarom willen de biologen graag weten hoe dat op- en ontwinden in zijn werk gaat. Verder is het van belang om te kunnen zeggen of DNA-moleculen onderling bepaalde interacties kunnen aangaan (recombinatie). Bij recombinatie kunnen moleculen ontstaan die in de knoop zijn geraakt. Of een bepaald molecuul kan worden gevormd hangt dan onder meer af van zijn knopenstructuur (topologie). Soms blijkt zo'n overgang topologisch onmogelijk te zijn. Onlangs is de Amerikaan Cozzarelli erin geslaagd deze knopenstructuur met een elektronenmicroscoop zichtbaar te maken. Ingewikkelde knopen zoals die bij DNA-moleculen voorkomen, kunnen op miljarden verschillende manieren worden gemaakt. Met de nieuwe methode van Jones hebben biologen nu een nieuw stuk gereedschap om na te gaan of twee DNA-configuraties hetzelfde zijn of niet.

Label

De classificatie van knopen is al een oud probleem. Een bekende goocheltruc is het publiek een koord met een aantal ingewikkelde knopen erin voor te houden, dat echter met enkele kunstgrepen blijkt over te gaan in één lus, zonder dat de magiër het breekt. Met een gestrikte schoenveter, waarvan de uiteinden aan elkaar zijn vastgemaakt, is dat niet mogelijk zonder de veter te breken. De gestrikte veter en het magiërkoord zijn topologisch verschillend. Vroeger maakte men alleen onderscheid tussen knopen door er verschillende namen aan te geven, zoals de mastworp, het Turks Hoofd, de Binimi Twist, etc. De Amerikaan Ashley classificeerde in de jaren veertig 4000 verschillende knopen, schakels van knopen (bijvoorbeeld twee in elkaar grijpende ringen), vlechten, etc.
De wiskundigen doen dit systematischer. De wiskundige definitie van een knoop is: een gesloten kromme die zichzelf niet snijdt. Zij proberen dan aan elke knoop een soort identiteitskaartje (label) te hangen in de vorm van een formule, een 'polynoom' (bijvoorbeeld $1 - 3x + 3x^2 - 3x^3 + x^4$). Tot voor kort was het beste label het uit de jaren twintig

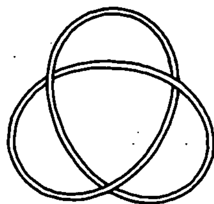
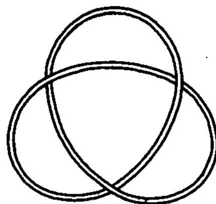


Bijschrift bij foto
DNA-moleculen nemen vaak een supergewonden vorm aan. Het is niet direct te zien of deze ook echt geknoopt zijn. De foto betreft r-DNA recombinant plasmide (HMT), en is afkomstig van dr. H. Zentgraf van het Deutsches Krebsforschungszentrum in Heidelberg.

stammende Alexander-polynoom. Het probleem was echter dat die hetzelfde bleek te zijn voor diverse knopen, waarvan een kind kon zien dat ze verschillend waren. Het zoeken was dus naar een label die voor verschillende knopen ook steeds anders was.

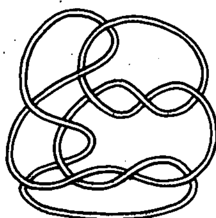
Algebra

De oplossing kwam – zoals in de wiskunde nogal eens voorkomt – uit een geheel andere hoek. Jones was eigenlijk bezig de eigenschappen van bepaalde soorten zgn. Von Neumann algebra's te onderzoeken (genoemd naar de beroemde wiskundige en computerpionier). Een van die eigenschappen – ook in de vorm van een polynoom – deed enkele collega's denken aan ideeën uit de knopentheorie. Na contact met een expert op dit gebied, Joan Birman, werd duidelijk dat dit Jones-polynoom geschikt was om knopen te onderscheiden, waarvoor het Alexander-polynoom hetzelfde was. Dat is

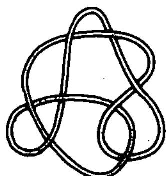
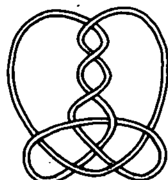



(a) (b)

Het Klaverblad: (a) linkshandig, (b) rechtshandig.
Het Jones-polynoom is voor deze – meest eenvoudige – knopen reeds verschillend.



Het is soms moeilijk te zien of een stuk touw echt in de knoop zit of niet. Hierop zijn heel wat goocheltrucs gebaseerd. Bovenstaande knoop kan, zonder hem te breken, worden teruggebracht tot een cirkel, en is dus geen echte knoop.

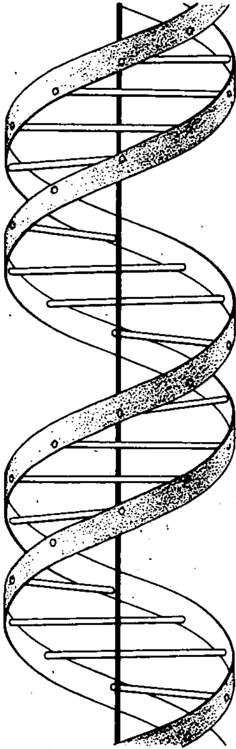
(a) (b)

Na de ontdekking van Jones hebben verschillende wiskundigen een nog algemenere formule gevonden om knopen van elkaar te onderscheiden. Maar ook deze blijkt voor sommige duidelijk verschillende knopen toch nog dezelfde te zijn. De eenvoudigste zijn de 8_8-knoop (a) en de 10_{129}-knoop (b).

bijvoorbeeld al het geval bij het 'klaverblad' oftewel de overhandse knoop, de eenvoudigste knoop die je met een touw kunt leggen en die algemeen wordt gebruikt bij schoenveters, bij pakjes en dergelijke. Er zijn twee varianten, het linkshandige en het rechtshandige klaverblad. Het Jones-polynoom is voor deze twee knopen verschillend. Jammer genoeg zijn er toch nog knopen met hetzelfde Jones-polynoom, die van elkaar verschillen. Helemaal perfect is de formule dus niet. Toch kan men spreken van een grote vooruitgang, niet eens zozeer wegens de fijnere classificatie dan wel omdat deze direct verband houdt met biologische begrippen.
DNA kan op twee manieren worden veranderd. Het kan ergens breken, doortocht bieden aan een ander deel van het molecuul, en zich vervolgens weer sluiten. En het kan op twee plaatsen breken, waarna de uiteinden kruiselings met elkaar worden verbonden. Neem nu de Jones-polynomen van de oorspronkelijke molecuul, en van de twee moleculen ontstaan na een 'doortocht' en na een 'kruising'. Hun som is dan gelijk aan nul. Op grond van deze eenvoudige formule kunnen wiskundigen nu bijvoorbeeld zeggen of bepaalde door biologen opgestelde recombinatiemodellen al dan niet mogelijk zijn.

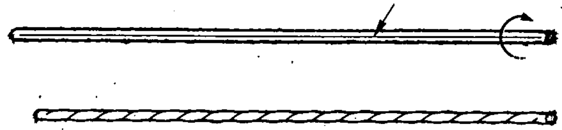
Verband

Bij de wiskundige beschrijving van het bedrag van DNA moet men ook rekening houden met de kromming en draaiïng, d.w.z. de meetkundige eigenschappen van de strengen. Als men bijvoorbeeld een papieren lint steeds verder gaat opvouwen of in de knoop leggen, dan gaat het scheuren of breken. Zoiets mag natuurlijk bij een DNA-molecuul niet gebeuren.
In 1969 vond de Amerikaanse wiskundige James White een opmerkelijk verband tussen de verstrengeling ('linking') en de gedraaidheid ('twisting' en 'writhing') van een DNA-molecuul. Met behulp hiervan kan men uit bepaalde metingen conclusies trekken over de – niet direct waarneembare – detailstructuur van DNA. Zoals bekend bestaat DNA uit twee om elkaar gewonden spiraalvormige strengen (de 'dubbele helix') met een gemeenschappelijke (denkbeeldige) as. De strengen zitten overdwars aan elkaar vast. Deze verbindingen vormen als het ware een wenteltrap.
Ruw gezegd is twisting een maat voor de draaiïng der treden rond de as, en writhing een maat voor de grilligheid van de vorm der as zelf. White's formule zegt nu dat de som van deze twee (meetkundige) maten gelijk is aan de mate van verstrengeling

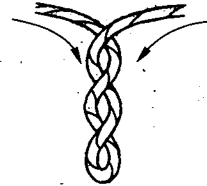


De wenteltrapstructuur van een DNA-molecuul

Illustratie van de formule van White
Neem een stuk touw en breng een markeringslijn aan (evenwijdig aan de as van het touw).



Houd één eind vast, draai het andere eind een flink aantal slagen om, en verbind beide uiteinden van de as met elkaar via een denkbeeldige kromme in het vlak van tekening. De zo in zichzelf gesloten as is een vlakke kromme en heeft dus writhing = 0, maar de linking van de markering is groot, evenals de twisting (je kunt het touw voelen trekken in je vingers).



Breng nu beide uiteinden van het touw naar elkaar toe. De linking verandert dan niet, maar de markering krijgt een supergewonden vorm en de writhing neemt toe, terwijl de twisting – in overeenstemming met de formule van White – met eenzelfde bedrag afneemt (het touw ontspant zich, de druk op de vingers neemt af).

(linking), een zuiver topologische eigenschap. Writhing is meetbaar, bijvoorbeeld door middel van centrifugeertechnieken. Als nu in een proces de linking hetzelfde blijft, dan betekent een waargenomen verandering in writhing dus even een grote, tegengestelde verandering in twisting. Op grond hiervan kan men bijvoorbeeld na invoeging van een extra stukje ladder in een DNA molecuul uitrekenen hoeveel steiler of minder steil de wenteltrap is geworden.
De wiskundige studie van linking kan overigens ook meer inzicht brengen in de sterkte-eigenschappen van materialen.

Zowel de formule van White als de recente ontdekking van Jones zijn voor de biologen belangrijke hulpmiddelen, die samen meer duidelijkheid kunnen brengen in de eigenschappen van DNA, en waarvan de mogelijkheden nog lang niet uitputtend zijn onderzocht.

Uit: WIN, bulletin van het Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam.

Van de bestuurstafel . . .

Leen Bozuwa

Het is al weer even geleden dat u deze rubriek in uw lijfblad aantrof. Dat komt niet omdat het bestuur niet vergaderde, maar omdat ik u uitsluitend de krenten uit de pap beloofde. Welnu, pap was er genoeg, maar krenten, homaar! Ik heb de oogst van drie borden bestuursvergadering dus maar verzameld om u tenminste nog wat eetbaars te kunnen voortzetten.

Contacten met de staatssecretaris

Met geen bewindsman onderhield het bestuur ooit zulke innige contacten als met de huidige staatssecretaris, Mevrouw Ginjaar-Maas. We schrijven brieven, sturen moties of gaan op audiëntie. In de afgelopen maanden hebben we vooral contact gehad over de 70-30 maatregel. Door de staatssecretaris is een aantal vakken aangewezen voor welke het CITO en de SCO (Stichting Centrum voor Onderwijsonderzoek) een onderzoek gaan houden naar de gevolgen van de 70-30 maatregel voor de mavo/lbo examens. Wiskunde was daar niet bij, maar wij zijn van mening, dat juist bij wiskunde deze maatregel een aantal hoogst ongewenste neveneffecten op de opleidingen kan hebben. Vandaar een brief waarin wij verzoeken zo'n onderzoek ook voor de wiskunde te houden.
Op 9 december heeft een bestuursdelegatie op uitnodiging van de staatssecretaris met haar een gesprek gehad over de campagne "Kies exact". Punten die wij daarbij ingebracht hebben, zijn: 1 waarom de campagne beperken tot havo/vwo?, 2 hoe meer leerlingen exact kiezen, hoe groter het tekort aan leraren, 3 eigenlijk zou moeten worden gewacht tot havo A is ingevoerd en 4 uitbreiding van de populatie exact-kiezers vraagt een verandering van de attitude van de leraar, kortom, nascholing nodig!
Hoewel Mevrouw Ginjaar zich liet kennen als een sympathieke en deskundige gesprekspartner, kunnen we nog niet zeggen dat onze inspanningen om haar van onze zienswijze te overtuigen optimale resultaten hebben gehad. Maar we blijven hopen.

Samenwerking met Vlaamse Vereniging van Wiskunde Leraars (VVWL)

Reeds vele jaren onderhouden we goede contacten met de VVWL. Elk jaar wordt er een gezamenlijke studiedag georganiseerd, maar de belangstelling voor deze dagen vanuit de leden is minimaal. Toch lijkt het ons een goede zaak om ook wat wiskunde betreft verder te kijken dan de eigen landsgrenzen. Daartoe zouden contacten met onze Vlaamse zustervereniging goede mogelijkheden bieden.
Immers we spreken dezelfde taal en de afstand tussen beide landen hoeft ook geen grote belemmering te betekenen. Veel grotere verschillen liggen er op het gebied van de schoolwiskunde. Maar juist dat zou een beter contact tussen wiskundedocenten van beide landen waardevol maken. Maar hoe krijg je die wiskundedocenten daar warm voor? Om op deze vraag een antwoord te vinden, hebben de twee besturen besloten een gezamenlijke werkgroep te installeren. Deze werkgroep moet de mogelijkheden van onderling contact op docentenniveau onderzoeken en met aanbevelingen komen. Het zou ongetwijfeld bij kunnen dragen aan de verdere ontwikkeling van het wiskundeonderwijs in beide landen als de werkgroep spoedig met bruikbare ideeën kwam.

Evaluatie HEWET

De evaluatie van Hewet is tot nu toe onvolledig geweest. Er zou b.v. moeten worden onderzocht hoe het gesteld is met de aansluiting vwo-wo en vwo-hbo, nu het eerste complete cohort met A en B de school verlaten heeft. Dit is een van de punten uit een discussiestuk waarover binnen het bestuur gesproken wordt. Gegevens, suggesties en menin-

gen van de leden zouden voor onze gedachtenvorming zeer waardevol kunnen zijn. We hebben b.v. gehoord van een docent die een enquête onder zijn oudleerlingen heeft gehouden. Misschien zijn er meer collega's die over dergelijke gegevens beschikken. We houden ons van harte aanbevolen.

Wiskunde verplicht?!?

Wij zijn daar nog niet uit. En wat denken de leden er van? Als er één onderwerp is waarover de meningen verdeeld zijn, dan is het dit wel.
Als er meer streaming in de pakketkeuze komt is het logisch dat ook wiskunde verplicht wordt. Ook als dit niet zo is, kan men wiskunde even belangrijk vinden als Nederlands en het apart verplicht stellen. De staatssecretaris is er in ieder geval een voorstandster van. Als wiskunde verplicht wordt, moeten programma's, examens en docenten worden aangepast. Wordt het niveau niet erg laag als iedereen verplicht wiskunde moet doen?
Met deze gedachten storten wij ons een volgende keer opnieuw op dit onderwerp en we hopen dat onze leden meedenken en meepraten. Het adres van de secretaris is bekend?

Ophouden met dat gezeur over die pap!

Nou dat doe ik dan ook. Dit waren mijn laatste krenten. Tijdens de laatste jaarvergadering heb ik mij niet meer herkiesbaar gesteld voor een bestuursfunctie van de NVvW. Ik kan dus niet meer gewagen van wat er rond de bestuurstafel besproken, bedisseld, gewikt, gewogen en beslist wordt. Ik zal mij deemoedig scharen onder het hopelijk grote aantal trouwe en aandachtige lezers van deze rubriek. Ik lust er wel pap van.

Boekbesprekingen

Crown, Fenrick, Valenza, *Abstract Algebra*, Marcel Dekker, New York, $ 39.00, 416 blz.

De schrijvers hebben zich ten doel gesteld een cursus samen te stellen die geschikt zou zijn als leerboek voor een uitgebreid basisprogramma algebra. Resultaat is een boek dat de gebruikelijke onderwerpen behandelt: groepen, werking van groepen en oplosbare groepen, ringen, factorisatie in commutatieve ringen; algebra's, modulen en vectorruimten; lichaamsuitbreidingen en Galoistheorie.
In een tweetal appendices wordt aandacht besteed aan het Keuzeaxioma en het lemma van Zorn, respectievelijk aan categorieën en functoren.
Een korte bibliografie en een uitgebreide index sluiten het boek af.
De auteurs zijn er in geslaagd de stof op overzichtelijke wijze te presenteren. Een groot aantal voorbeelden illustreren de geïntroduceerde begrippen of leiden nieuwe onderwerpen in. Elke paragraaf is voorzien van een aanzienlijke lijst oefeningen, variërend van directe toepassingen van stellingen tot pittige opgaven.
Geen boek met spectaculaire vernieuwingen maar een prettige handleiding, zowel voor cursussen als voor zelfstudie.

Harm Bakker

Ashley/Fernandez: *Werken met PC-DOS*, Academic Service; *f* 68,–; 389 blz.

Met de nog steeds groeiende populariteit van de Personal Computer is ook de behoefte toegenomen aan gedegen handleidingen.
Iedereen die zelfstandig met een PC wil werken zal ook enig begrip moeten ontwikkelen van het besturingssysteem. De door de leverancier bijgevoegde documentatie blijkt veelal te beknopt of moeilijk toegankelijk.
Dit boek is een van de vele uitgaven die in de geschetste behoefte willen voozien. Het onderscheidt zich echter door een doordachte didactische aanpak. Ieder hoofdstuk is verdeeld in een aantal korte paragrafen die worden afgesloten met een serie toetsvragen, waarmee gecontroleerd kan worden of de stof begrepen is. Daarnaast bevat ieder hoofdstuk aan het eind een praktijkgerichte set opgaven.
Een uitgebreide index zorgt ervoor dat het werk goed toegankelijk is.
Al met al een duidelijk geschreven boek dat ook iemand die geen ervaring heeft op computergebied snel wegwijs kan maken.

Harm Bakker

Recreatie

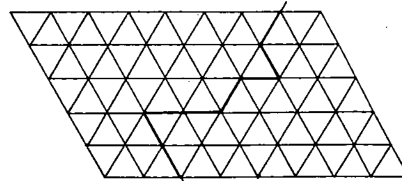
Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

586 Van een kubus kan men verschillende uitslagen maken. Dan de noodzakelijke plakrandjes aanbrengen om herstel van de kubus weer mogelijk te maken. Dit blijken er bij elke uitslag 7 te zijn. Waarom steeds hetzelfde aantal?
Ligt dat aan het aantal ribben? Als men van een convex veelvlak met 12 ribben een uitslag maakt, is het aantal benodigde plakrandjes dan steeds 7?
En nu komt de hamvraag waar het me om begonnen is. Bij elk convex veelvlak met r ribben zijn een aantal plakrandjes nodig om van een uitslag het veelvlak te reconstrueren. Hoe groot is dit aantal minimaal? En hoe groot maximaal?

587 In Pythagoras van november 1986 komt de volgende opgave voor:
In een straat wonen meer dan 100 mensen. Bewijs dat er 11 mensen in die straat wonen waarvan de som van de leeftijden deelbaar is door 11.
De steller van de opgave heeft ten bate van de oplossers het getal 100 wel ruim genomen. Ook voor kleinere aantallen is de bewering nog juist. Interessant is na te gaan wat het kleinste getal p is waarvoor geldt: als in de straat minstens p mensen wonen, dan wonen er zeker 11 mensen in waarvan de som van de leeftijden deelbaar is door 11.
Oplossingen van nummer 587 binnen een maand na verschijnen van dit nummer aan mij toe te sturen.

Oplossingen

580. Een lap heeft de vorm van een parallellogram met zijden a en b en een hoek van 60°. De lap is bedrukt met gelijkzijdige driehoeken met zijde 1. Hij wordt in twee delen verdeeld door te knippen. Men mag daarbij langs de zijden knippen naar rechts boven (*rb*), links boven (*lb*) en horizontaal naar rechts (*hr*). Op hoeveel manieren is dit mogelijk?

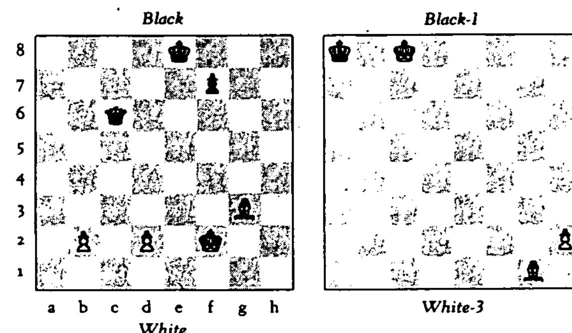


We laten ook knippen langs de rand van het parallellogram toe. Elke knip kunnen we dan voorstellen als een knip die in A begint en in B eindigt. De getekende knip is de knip *hr, hr, lb, lb, hr, hr, rb, hr, lb, rb, hr*.
Laat hieruit de knippen *hr* weg. We houden dan over 2 keer *rb* en 3 keer *lb*. Een dergelijke serie kunnen we op $\binom{5}{2}$ manieren vormen. Algemeen: een serie van p keer *rb* en $b - p$ keer *lb* kunnen we op $\binom{b}{p}$ manieren vormen.
Nu letten we alleen op de knippen *hr*. Die vallen in ons geval langs 6 horizontale lijnen. Hun lengten zijn resp. 2, 0, 2, 1, 0, 1. Samen 6. In het algemeen vallen ze langs $b + 1$ horizontale lijnen en is de som $a - p$. Het aantal manieren waarop dit mogelijk is, is het aantal manieren waarop we $a - p$ kunnen verdelen in $p + 1$ getallen (waaronder getallen 0 mogen voorkomen). Dit kan op $\binom{a-p+p+1}{p+1} = \binom{a+1}{p+1}$ manieren.
In totaal krijgen we dus

$$\sum_{p=0}^{b} \binom{b}{p}\binom{a+1}{p+1} = 2^b\binom{a+1}{p+1} \text{ manieren.}$$

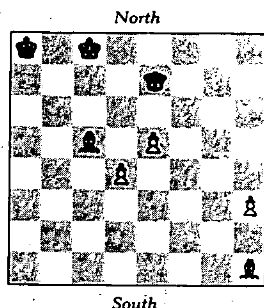
(Bij twee van deze knippen wordt de lap oneigenlijk verdeeld, doordat de knippen alleen langs de randen vallen.)

582 Is tijdens het spel een witte pion gepromoveerd?
Op g3 staat een witte loper. Aan het begin van het spel stond de witte loper op c1. Wegens witte pionnen op b2 en d2 kan hij nooit van dit vak weggekomen zijn. Hij staat daar niet meer en is dus geslagen. Maar dan is de huidige witte loper door promotie ontstaan (*figuur 1*).



583 De laatste zet van zwart kan alleen maar een zet met de koning geweest zijn (*figuur 2*). Vanaf b7 of b8 is onmogelijk. Dus

vanaf a7. Dit schijnt ook onmogelijk, want de loper heeft al minstens twee tempi op de lijn g1-a7 gestaan. Dus zou de koning toen hij naar a7 ging zichzelf schaak gezet hebben: tenzij toen de koning naar a7 ging, hij daar niet schaak stond. Er stond dus een stuk tussen a7 en de loper. Dat stuk staat er niet meer en is dus geslagen. Het kan alleen door de koning geslagen zijn en wel op a8. Dus stond er een wit paard op b6. Dit paard heeft wit gebracht op a8; nu eerst staat de zwarte koning schaak. Deze slaat het witte paard.



584 De laatste zet moet weer geweest zijn: zwarte koning van a7 naar a8. Dat kan alleen als er nog een wit stuk tussen a8 en h 1 gestaan heeft. Er zijn twee mogelijkheden.

a South is wit. Op g2 stond een witte pion en op h3 een zwart stuk. De pion heeft dit stuk geslagen. Helaas kan dit niet. Want stond de witte pion op g2, dan is het onmogelijk dat de witte loper ooit op h 1 gekomen is.

b South is wit en de laatste zet van wit is geweest: pion van e4 naar e5. Dan is de zet daarvoor van zwart geweest: koning a7-a8. Maar hoe de koning daarvoor op a7 terecht gekomen is, blijft een raadsel, want zowel witte loper als witte dame bestrijken dit veld.

Dus rest alleen:

c North is wit. Er stond een zwart stuk op h 1 (ik blijf dit veld h 1 noemen; eigenlijk moet ik na de kleurverandering zeggen: a8). Op g2 stond een witte pion. Deze heeft het stuk op h 1 geslagen. En toen zich tot loper laten promoveren. Waarna zwart mat stond.

Mededeling

IFIP-Conferentie

Op 27, 28 en 29 april 1988 wordt in Amsterdam de derde Internationale conferentie belegd over Vrouwen, Werk en Computers. Deze conferentie vindt plaats onder auspiciën van de International Federation for Information Processing (IFIP).

De conferentie is bedoeld voor onderzoek(st)ers, computerdeskundigen, beleidsmakers, personeels- en organisatiedeskundigen en voor vrouwen werkzaam of geïnteresseerd in informaticaberoepen. Zowel vrouwen als mannen zijn van harte welkom.

Doel van de conferentie is een verdieping en verbreding van de bestaande kennis, onder meer door de uitwisseling van ideeën, ervaringen en onderzoeksresultaten in internationaal verband. Tevens wordt beoogd, strategieën te ontwikkelen die perspektief bieden op verbetering van de positie van vrouwen in relatie tot nieuwe technologieën.
Belangrijke thema's op de conferentie zijn:
- ontwerp en implementatie van geautomatiseerde systemen en de participatie van vrouwen
- nieuwe funkties en kansen voor vrouwen
- gebruikersopleidingen en vrouwenvakscholen
- toepassingen en gevolgen van nieuwe technologieën in de derde wereld

De conferentie bestaat uit een plenaire dag en twee dagen workshop. Aan deze onderdelen kan afzonderlijk worden deelgenomen.
De eerste, plenaire, dag (27 april) zal plaatsvinden in de Aula van de Vrije Universiteit in Amsterdam. Hier zullen de inleidingen gehouden worden door vijf sprekers.
In de workshop (28 en 29 april) zullen vijf onderwerpen aan de orde komen. Deze zullen worden besproken aan de hand van tevoren ingediende papers.

De inhoudelijke opzet en vormgeving berust bij een Nederlands organisatiecomit, bestaande uit mensen die zich reeds enige jaren met het thema bezighouden.
De kosten van de plenaire dag bedragen Dfl. 50,– (excl. 20% B.T.W.), voor de workshop Dfl. 500,– (excl. 20% B.T.W.).
Aanmelding voor de conferentie: voor 1 april 1988.

Nadere inlichtingen zijn te verkrijgen bij de Stichting Informatica Congressen, Paulus Potterstraat 40, 1071 DB Amsterdam, tel. 020-620681.

Boekbesprekingen

Detlef Laugwitz, *Ingenieurmathematik*, Band 1 en 2, B.I.-Wissenschaftsverlag Mannheim/Wien/Zürich; 168/156 blz., D.M. 12,80 per Band.

De genoemde boeken maken deel uit van een serie Hochschultaschenbücher van genoemde uitgever. Het is niet de bedoeling dat deze boeken als naslagwerk zullen dienen voor de afgestudeerde ingenieur, hoewel met name deel 2 m.i. toch wel als zodanig dienst zou kunnen doen; veeleer zijn ze bedoeld als ondersteuning bij het verwerken van de gevolgde colleges.
In Band 1 komen zaken aan de orde als: reële getallen, complexe getallen, analytische meetkunde, rationale functies, rijen, limieten.
In Band 2 komt de differentiaal- en integraalrekening aan de orde; o.a. differentiaalmeetkunde van vlakke en ruimtelijke krommen, het differentiëren bij functies van meerdere variabelen.
De deeltjes doen, mede door het gebruikte lettertype, ouderwets-degelijk aan. Drukfouten of andere onjuistheden komen nauwelijks voor; op blz. 115 van deel 1 vinden we er echter twee vlak na elkaar. Uiteraard is in de nieuwste drukken rekening gehouden met het gebruik van de rekenmachine.
Beide boeken lijken me zeer geschikt voor het doel waarvoor ze geschreven zijn en het hoeft dan ook niet te verbazen dat ze (de eerste druk dateert uit 1963 resp. 1964) nog steeds in een behoefte blijken te voorzien.

G. M. Hogeweij

Auke Sikma: *Logisch Logo*, Academic Service; *f*35,–; 229 blz.

De programmeertaal Logo wordt soms gezien als een 'kindertaal'. Dat dat in ieder geval onterecht is weet de auteur in dit helder geschreven boek zonder meer duidelijk te maken.
Na een inleidend hoofdstuk waarin de filosofie achter Logo uit de doeken wordt gedaan volgen er hoofdstukken waarin de vier 'werelden' van Logo (schildpadwereld, taalwereld, muziekwereld, sprokenwereld) uitvoerig worden besproken.
In hoofdstuk 7 doet de schrijver verslag van zijn ervaringen met leerlingen in de klas en geeft hij zijn visie op de mogelijkheden van Logo als 'omgeving' waarin het kind gestructureerd en probleemoplossend leert denken.
In hoofdstuk 8 wordt een overzicht gegeven van de meest gebruikte Logo-versies, waarbij een vergelijkingstabel wordt weergegeven.
Een viertal appendices sluit het boek af.

Harm Bakker

Daniel E. Cohen: *Computability and Logic*, Ellis Horwood Series in Mathematics and its Applications, £36.50; 245 blz.

De begrippen berekenbaarheid en beslisbaarheid staan centraal in het eerste deel van dit boek. De auteur kiest ervoor de lezer eerst op intuïtieve wijze kennis te laten maken met deze materie. Verscheidene voorbeelden illustreren het behandelde.
Vervolgens wordt via primitief- en partieel-recursieve functies en diverse machinemodellen (Abacusmachine; Turingmachine; Modulaire machine) gewerkt aan een theoretische basis. Met behulp van Church's Thesis worden de intuïtieve en abstracte betekenis van berekenbaarheid gecombineerd.
Het tweede deel besteedt eerst aandacht aan enkele begrippen uit de propositie logica en de predikaat logica die voor de rest van het boek nodig zijn.
Met het ontwikkelde begrippenapparaat worden nu resultaten afgeleid over beslisbare en onbeslisbare theorieën.
Voor iemand die kennis wil maken met enkele aspecten van de Theoretische Informatica is dit een uitermate geschikt boek.

Harm Bakker

Kalender

13 mei 1988: Utrecht, Van der Blij 65
27 juli-3 augustus 1988: Budapest, ICME-Congres
29 oktober 1988: Bilthoven, Jaarvergadering/Studiedag NVvW

Inhoud

Adressen van auteurs

Leen Bozuwa, Merwedekade 90, 3311 TH Dordrecht

J. J. Breeman, De Genestetlaan 94, 2741 AG Waddinxveen

Dr. J. T. Groenman, Poggenbeekstraat 26b, 6813 KH Arnhem

P. Hustinx, Socrateslaan 7, 5216 CR Den Bosch

Henk Nieland, p/a C.W.I., Kruislaan 413, 1098 SJ Amsterdam

Hessel Pot, Tournoyveld 67, 3443 ER Woerden

Henk Schuring, Van Heemstralaan 21, 6814 KB Arnhem